Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

62e jaargang
1986 | 1987
januari

Euclides 4

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
Mw I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofdredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Prof dr F. Goffree
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Mw H. S. Susijn-van Zaale
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Prof dr F. Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin, tel. 030 - 78 37 23. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P. E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52[c], 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 63 08. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Annemarie, de eredivisie, een heks en de NS

Fred Goffree

Vooraf

Kinderen die in het voorjaar nog moeilijke sommen uit het laatste deeltje van de rekenmethode maakten, buigen zich in het najaar over de opgaven uit hun wiskundeboek. Bij beide gelegenheden waren ook leraren betrokken, leraren met een zeer verschillende opleiding en achtergrond. Kennen beide leraren elkaar? Weten beide leraren van elkaar hoe ze het reken-wiskunde-onderwijs voor dezelfde leerlingen inrichten? Zijn ze erin geïnteresseerd hoe aan beide zijden van de eindtoets basisonderwijs kinderen het vak beoefenen? Spannen ze zich in om beide werelden met elkaar in verband te brengen? Nemen ze kennis van de ontwikkelingen in het reken-wiskunde-onderwijs voor kinderen van, zeg maar, vijf tot vijftien?
Uitgaande van de aanwezigheid van die belangstelling en lettend op het feit dat leraren hun tijd graag efficiënt besteden, is een ontwikkelgroep van de SLO[1] begonnen met het maken van een boek voor beide groepen. 'Tussen twee (getal-)werelden' luidt de werktitel. Centraal in dit boek staan de negatieve getallen, omdat brugklassers daarmee voor het eerst officieel geconfronteerd worden en omdat alles waarop hierbij voortgebouwd wordt, in de basisschool is gebeurd. En natuurlijk omdat na de brugklas de negatieve getallen, binnen en buiten het wiskundeprogramma niet meer zijn weg te denken. Uit dit boek in wording laten we hier alvast het hoofdstukje zien, dat ten behoeve van leraren basisonderwijs al eerder in Willem Bartjens werd gepubliceerd.

Elf december, woensdagavond. Om precies zeven uur belt ze aan. Het is tijd voor bijles. Vorige week, de dag voor Sinterklaas, was ik even bij haar langs gegaan. Zullen we deze keer maar overslaan, stelde ik haar toen voor. Ik heb het nogal druk en ik denk dat jij ook nog wel een gedichtje moet maken. Maar, voegde ik met enige nadruk (en een kwaad geweten) eraan toe, als je problemen hebt gaan we natuurlijk gewoon aan de slag. Dat was wel goed, zei ze, maar haar stem klonk somber. We hebben proefwerk gehad, over dat hoofdstuk met 'hoeken'. En, vroeg ik hoopvol. Die hoop was alleszins gerechtvaardigd, want Annemarie had de laatste maand alleen maar hoge cijfers voor wiskunde gehaald. Waarom ze dan toch op bijles zat? Dat kwam zo. In het begin van dit brugklasjaar had Annemarie het op alle vakken, behalve wiskunde, heel goed gedaan. De wiskundeleraar, die inmiddels al geraadpleegd was, had de zorgen van de ouders niet kunnen wegnemen. Integendeel, zijn mededeling dat men juist was begonnen met een nieuw 'systeem', zat hun niet lekker. Een nieuw systeem? Heeft dat te maken met die werkgroep uit Utrecht? Wij hebben een buurman, die is van Wiskobas, van het IOWO. Oh ja, hebben die dat systeem ontwikkeld? En staat u daar wel achter?
Dit gesprek en de achterliggende bezorgdheid, werden weer opgerakeld toen we met een heel stel buurtgenoten de verjaardag van Annemaries vader vierden. Dat was half oktober, en sinds die tijd komt ze 's woensdags tussen 7 en 8 uur even langs. We ontdekten samen al gauw dat dat 'nieuwe systeem' (Moderne Wiskunde) helemaal niet zo moeilijk is. Ik kreeg bovendien in de gaten dat Annemarie met rekenen had geleerd precies te doen wat de onderwijzer voorzegde of wat het boek voorschreef. Haar wiskundeboek zat heel anders in elkaar, er stonden meer vragen in dan aanwijzingen, er werd steeds in op aangedrongen dat je het zelf maar moest uitzoeken. Zoiets als: kijk naar dit tegelpatroontje, beschrijf het met getallen, zoek de wetmatigheid.
Het enige wat Annemarie eigenlijk ontbrak was het inzicht, dat ze dat soort dingen zelf kon doen, zonder dat het eerst voorgedaan was. Dat je kunt beginnen aan een opgave, gewoon met je 'blote verstand', zonder direct te weten hoe je het moet doen, zonder direct 'de' oplossing te zien. Dergelijke stappen in het duister had ze nooit gemaakt. Logisch dat 'het nieuwe systeem' haar zwaar op de

maag lag. De proefwerkcijfers logen er niet om. Annemarie zag de toekomst, wat wiskunde betreft, somber in. Maar, zoals gezegd, op de bijles kregen 'we' door hoe je die opgaven wèl moest aanpakken en ontdekten we dat ze eigenlijk helemaal niet lastig waren. Annemarie kreeg er zowaar plezier in, ging zelfs dieper op zaken in dan eigenlijk bedoeld was. En vanaf half oktober haalde ze alleen nog maar achten op de repetities.

Maar vorige week leek het toch weer mis te zijn gegaan. De repetitie over hoeken, dacht ze helemaal verknald te hebben. En hoewel ik me nog geen zorgen maakte over deze mogelijke terugval, was ik toch wel erg benieuwd naar eventuele oorzaken. Vanochtend ben ik enigermate uit de droom geholpen, heel vroeg al, op het koude perron van station Den Dolder. Daar bracht Annemaries vader mij het hartverwarmende bericht dat zijn dochter een 9,3 voor die bewuste repetitite had gehaald. Hij glunderde en ik begon uit te zien naar de bijles. Hoe had Annemarie haar werk zo verkeerd kunnen beoordelen?

Vanavond deed ze dat uit de doeken. Ze had de repetitie, trots, bij zich. 'Compliment!' was er boven geschreven. Bijna alles goed, en toch gedacht dat je het slecht gemaakt had? Hoe kàn dat nou? De verklaring bleek simpel. In de opgaven hadden enkele gegevens gestaan die ze bij de oplossing niet had kunnen gebruiken. Nou, dat kan toch niet goed zijn, had ze zich achteraf bezorgd afgevraagd. Nu de lezer Annemarie iets beter heeft leren kennen, kan ik de interessante gebeurtenissen die plaatsvonden op de bewuste bijles van 11 december, ook nog wel even vertellen. Dat zit namelijk zo. Sinds kort, enige lessen nog maar, zijn ze bij haar in de klas bezig met *negatieve getallen*. Daarom stelde ik haar deze keer voor om mij daarover te vertellen. Zo schreef ik boven aan een blanco blaadje:

'Het verhaal over negatieve getallen', verteld door Annemarie op 11 december 1985.

Wat er verder kwam zal ik hieronder zo letterlijk mogelijk beschrijven. Tijdens de bijles heb ik geprobeerd weinig te zeggen, hetgeen me, al zeg ik het zelf, redelijk goed afging. Voor alle duidelijkheid noteer ik mijn vragen en opmerkingen in de tekst tussen sterretjes.

Wanneer ik de kop bovenaan het lege blaadje geschreven heb, blijft het stil. Annemarie schuifelt wat op haar stoel heen en weer. Je ziet haar denken: wat moet ik nou zeggen?

Wat zijn negatieve getallen?

Ik dacht alle getallen. Nee, dat is fout.

Moeilijk hè, om zo'n verhaal te vertellen. Misschien helpt het als je even denkt aan wat mijnheer Smaling vertelde, toen hij voor het bord stond...

(...) We zijn met een heks bezig. Die gooit blokjes in een ketel, met plusjes en minnetjes. De ketel is bijvoorbeeld 30 graden en we willen er 50 graden van maken. Of ze haalt er dan 20 koude blokjes (minnetjes) uit of ze doet er 20 warme blokjes (plusjes) bij. Daarna moesten we sommetjes maken. Bijvoorbeeld:

$-5 - -12 =$

$5 + 5 =$

$-50 + -20 =$

Nou ja, allemaal van zulke sommetjes.

Ging het over een hèks?



Figuur 1

Ja, daar begon je te leren met die plusjes en minnetjes. Ach, dat was natuurlijk onzin, het ging over een toverdrank. Het was zomaar een klein verhaaltje over een heks.

Waarom vertelt mijnheer Smaling nou een verhaal over een hèks?

Omdat het in het boek staat!

Hé, Annemarie, da's een goeie. Wat zou jij nu vragen als jij mij was?

Dat is een moeilijke vraag, maar ze heeft de grap

door. Dan zou ik vragen: Waarom staat het in 't boek?? *Prachtig!*
Het staat in het boek om het leuk te maken. Om te weten waarover het gaat. *(...)?? (...) Wat bedoel je met 'het'?*
Daar bedoel ik de heks mee en die plusjes en minnetjes.

Op dat moment schiet Annemarie nog iets te binnen. Ze komt er meteen mee voor de dag. Ze zegt: In het begin was er ook nog zoiets als de eredivisie. Dat ging over Ajax en Feyenoord en zo. Die stonden bovenaan, er was zo'n stand en dat veranderde allemaal. Die stand moesten we toen anders maken. Je moest dus zelf die eredivisie maken. Allemaal heel stom. Dat deden we nog voor de heks.
Wat heeft een heks nou met Ajax te maken?
Ik zou het niet weten. Nee, dat weet ik echt niet.
Het blijft even stil. Ik wil niets zeggen dat een mogelijk verband verraadt. Uiteindelijk ben ik nu op een essentieel punt aangeland. Ziet Annemarie de isomorfie tussen beide situaties, ziet ze dat de negatieve getallen en de sommetjes daarmee, bij heks en voetbalcompetitie, hetzelfde zijn en tegelijk wat anders beschrijven? Stil, ze gaat verder. Misschien is het iets met die negatieve getallen die ze gebruiken?
Gebruiken ze bij Ajax negatieve getallen? O.K., ik geef toe dat is flauw. Ik bedoel: gebruikt de meneer die de stand opmaakt negatieve getallen?
Ja, als hij de eredivisie opstelt. Dat gaat met doelpunten of zo.
Is het misschien handig om een voorbeeld te geven?
Ajax heeft 25 doelpunten gescoord en heeft er 20 tegen gekregen.
Hoe zie je daar negatieve getallen?
Ajax 25 voor en bijvoorbeeld 30 tegen. Dan heeft Ajax er −5. Tekort!
* −5 tekort?*
Nee, er staat al tekort, door die −, −5 dus, en 5 tekort.
Ajax voor 25, tégen 30; waarom −5?
Nou Ajax moet er nog 5 bij scoren om gelijk te komen.
Kun je ook op een andere manier aan −5 komen?
Ik dacht aan een aftrekking, maar Annemarie zat nog in het Ajaxstadion. Ze zegt: dan moeten ze gaan verdedigen, want ze hebben er al 5 tekort. (...) Na wat heen en weer gepraat komen we uiteindelijk toch tot 'doelsaldo', een naar het schijnt ook voor Annemarie van twaalf niet onbekende klank. Die −5 komt van 25 voor, 30 tegen, dus van 25 − 30. Of Annemarie dit laatste leest als aftrekking of als uitslag (zoals Ajax-Feyenoord: 25-30) is niet duidelijk. Ik ga daar, helaas, ook niet op in.

	aantal wedstriden	gewonnen	gelijkgespeeld	verloren	aantal punten	doelpunten vóór doelpunten tegen
Ajax	17	13	2	2	28	43–18
Feyenoord	16	8	7	1	23	32–12
AZ'67	16	10	3	3	23	31–15
PSV	17	8	5	4	21	34–21
Utrecht	17	7	6	4	20	25–19
GA Eagles	16	7	4	5	18	28–20
Roda JC	17	8	2	7	18	25–24
Twente	17	7	4	6	18	22–25
Excelsior	17	6	5	6	17	27–32
Den Haag	16	5	6	5	16	19–22
PEC Zwolle	17	5	5	7	15	19–22
Willem II	17	4	7	6	15	20–30
MVV	17	2	9	6	13	19–24
Vitesse	17	3	6	8	12	20–32
Haarlem	17	3	6	8	12	19–32
Sparta	16	4	3	9	11	21–27
NEC	16	4	2	10	10	15–27
NAC	15	2	4	9	8	8–25

Figuur 2

En toen gingen jullie sommetjes maken. Welke?
Annemarie wil het boek, dat nog steeds gesloten op tafel ligt, pakken. Ik weerhoud haar daarvan. Het ging tenslotte om haar verhaal. Ik weet het niet. Ik weet het echt niet meer.
Misschien kun je bedenken welke sommetjes zeker niet.
Dat vindt ze een gekke (stomme?) vraag. De eerste reactie luidt dan ook: dat kan je helemaal niet weten! Gelijk heeft ze, maar ik ben een doorzetter.
Zojuist bij de heks heb je al een paar sommetjes genoemd, konden die ook allemaal bij de eredivisie? Ik gebruik voor het gemak ook maar even die globale aanduiding, natuurlijk was hier 'doelsaldi' beter geweest.
(...) Annemarie ziet ineens het licht in de heersende duisternis:

$-5 + -3 =$ zegt ze, kan niet.
Want, vult ze aan, iemand kan nooit -3 doelpunten scoren.
Prima, denk ik, dat is een voor de hand liggende interpretatie, niet de doelsaldi, maar doelpunten.
Hoe ging dat ook weer bij de heks?
De ketel is -5 graden. Je doet erbij 3 blokjes van min, drie koude blokjes dus. Dat is -8.
En nu nog eens proberen met doelsaldi.
Ik schrijf op: $-5 + -3 =$
Samen proberen we er dan betekenissen bij te bedenken. (Wie wàt zegt, is niet precies meer te achterhalen.)
Die -5 komt van bijvoorbeeld Ajax, 25 voor en 20 tegen (. . .) *?* Oh nee, 35 voor en 40 tegen.
Ik noteer: 35 voor, 40 tegen en dan wijs ik naar de plus in $-5 + -3 =$ . . Die heeft, zo herinner ik mij, te maken met Annemaries eerdere opmerking over: 'en dan verandert er wat'. Ik zeg: *en er wordt weer een wedstrijd gespeeld*. Bijvoorbeeld 6 – 2 (zes, twee) (. . .) *?* Oh nee, 0 – 3 (nul, drie) bijvoorbeeld.
Nu blijft er nog het = teken: $-5 + -3 =$. Ik wijs het aan *?* Nu moet er een nieuwe stand opgemaakt worden. *Goed zo!* Ik schrijf vast op

35 voor	40 tegen
0 voor	3 tegen

Annemarie 'vult in': (35 voor, 43 tegen). We zijn er uit: -8. *Hoe was de som ook weer?*
$-5 + -3 = -8$. *Aha, dus het lukt toch met de doelsaldi.* *Nog één?*
Annemarie bedenkt:
$+18 + -8 =$ en rekent het antwoord uit via de heksenmethode: 18° in de ketel, erbij 8 koude blokjes, temperatuur daalt 8°, dus 10° in de ketel.
En nu . . .? Met doelsaldi?
Er zijn 18 doelpunten gemaakt in een vorige wedstrijd *?*. Dan is er weer een wedstrijd, uitslag twee-tien (2-10) bijvoorbeeld. Dus 8 tekort, -8. Het nieuwe doelsaldo is dus 10.
Ik noteer haar verhaaltjes nog even aldus:

$$\begin{array}{ccccc} (30,12) & \rightarrow & (2-10) & \rightarrow & (32,22) \\ 18 & + & -8 & = & +10 \end{array}$$

Nu bedenk ik er een, maar ik betwijfel of het ons lukt een verhaal met doelsaldi te bedenken. Durf je het aan? Vooruit
$8 - -3 =$ *Weet je de uitkomst?*
Annemarie 'gokt' twee keer mis: 5? *Nee!* -5? *Nee!*
Laat ik toch maar aan de heks denken. Hé, 't wordt 11°. Acht warme blokjes, 3 koude eruit (. . .) *?*
Hoe kan dat, Annemarie, er zitten alleen maar 8 warme blokjes in, en je haalt er 3 koude uit?
Daar zit ze even meer; ze denkt natuurlijk eerst dat haar antwoord fout is. Zodoende komt ze terug op de 5 van zo net. *Nee hoor, je zat goed, maar . . .*
Nou, 8° kan ook zijn bijvoorbeeld 10 warm en 2 koud.
Ik spring een gat in de lucht. Dat wil zeggen, ik probeer dat ook echt te doen, om tot uitdrukking te brengen dat er iets bijzonders gebeurd is. *Hé! Zie je dat? Je zegt: 8 kan ook zijn (10, 2)! Dat heb ik eerder gezien, jij ook?* Bij de eredivisie? *Ja, daarnet, bij de doelsaldi!*
We praten nog even door over de uitkomst van 11°. 8 warm kan dus zijn: 8 warme blokjes, 0 koude, of 9 warme en 1 koude, enz. (. . .).
En nu met doelsaldi. Eens even kijken.
$8 - -3 = 11$ *Maak jij 't verhaal?*
8 betekent 10 voor, 2 tegen, *kunnen er wat meer tegen komen?*
14 voor, 6 tegen. Wat nu? Annemarie kijkt onzeker naar het sommetje $8 - -3 = 11$.
Dan slaan we, op mijn voorstel, even de eerste min over. -3 betekent: de uitslag is 3 – 6; onvermijdelijk moeten we dan toch naar de eerste en overgeslagen min terug.
Annemarie probeert wat onduidelijks: er is nog een wedstrijd, daar scoren ze 3 voor, zeg maar 3-0. Dan haal je er 3 tegen af, dus moet je nog een wedstrijd spelen met 3 voor (. . .).
Haar redenering heeft naar mijn indruk iets te maken met koude en warme blokjes die elkaar neutraliseren, maar ze loopt (natuurlijk) vast. Dat kan niet, zegt ze hartgrondig.

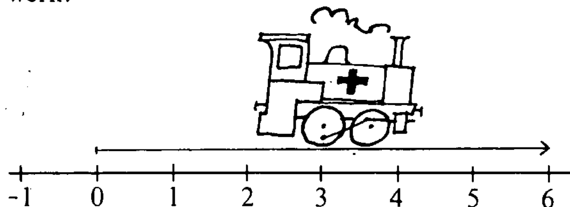
Nu moet ik wel het heft in handen nemen. Ik stel haar gerust en zeg dat we hier echt in de moeilijkheden zijn geraakt en dat ik me herinner vroeger wel eens een oplossing gezien te hebben. Die wil ik voor de aardigheid nog wel even proberen op te diepen. Maar alleen voor de aardigheid, beklemtoon ik nog eens.
Ajax (14, 6) doelsaldo: 8. Nu vraag ik Annemarie iets te bedenken bij de -3, ook een doelsaldo. Dat

doet ze, mooi passend in de context van de competitie: Feyenoord 7, 10), dus −3.
Let op, zeg ik (waarom eigenlijk, ze zit al bijna een uur lang goed mee te doen!?), nu kun je vragen: Hoeveel is het doelsaldo van Ajax méér dan dat van Feyenoord?

Merkwaardig, hoewel het antwoord 11 al bekend is (weliswaar gevonden in een andere context, maar goed...), gaat het ineens niet meer van een leien dakje. Pas als ze op het idee komt in doelpunten in plaats van in doelsaldi te denken, gaat het goed: hoeveel moet Feyenoord nog scoren om Ajax in te halen? Eerst 3, dan nog 8!
Of Ajax dat passief zal afwachten wordt niet verder besproken. Wat opvalt is dat het verschil tussen 8 en −3 wordt bepaald door bijtellen, net zoals kinderen in de onderbouw van de basisschool dat aanvankelijk doen.
Tenslotte bedenk ik voor Annemarie nog een serie sommen: $8 - 5 = 3$, $5 - 8 = -3$, $5 - 9 = -4$, $5 - 10 = -5$, $-5 + 10 = 5$, $10 - 5 = 5$, $10 - 6 = 4$, $10 - 10 = 0$, $10 - 11 = -1$, $-8 - 3 = -5$, oh nee, $= -11$, $-8 - -3 =$ oh nee, hoe was't ook weer met die heks?

Annemarie heeft een staartje

Gisteren kwam ze weer, na een week met griep in bed te hebben gelegen. Ze had 'verhoudingen' over gemaakt (en de helling van 35% verkeerd getekend) en 'negatieve getallen' gemist. Eigenlijk had ze geen vragen, behalve die helling op het proefwerk.



Figuur 3

Toen begon ik nog even over het verhaaltje over de treintjes, dat even verderop in het boek stond. Haar vader werkt bij de NS en dus vroeg ik of die wel eens van + treintjes en − treintjes had gehoord. Nee, natuurlijk niet, daar kon ze wel om lachen. Is het dan toch wel waar dat $-2 \times -3 = 6$ is, bijvoorbeeld? Ja, dat was wel waar. Ik kwam nog even terug op de heks, waarmee je toch ook -2×-3 kunt uitrekenen: je haalt er 2 keer 3 koude blokjes uit, dat is hetzelfde als 1 keer er 6 warme blokjes in doen, dus $-2 \times -3 = 6$. 'Geloof jij alles wat heksen doen?' vroeg ik. Annemarie haalt de schouders op. 'Ja, hier wel. Want die sommetjes kloppen toch!
'Wàt klopt er dan?' vroeg ik. 'Heksen vliegen op bezemstelen door de lucht, ze maken toverdranken waar je onzichtbaar door wordt – dat soort sprookjes vond ik vroeger wel leuk, maar ook toen al geloofde ik niet dat ze echt gebeurden. Jij wel?'
Nee, Annemarie ook niet, maar dit wel (???)
'Het staat in het boek, dan moet het wel goed zijn.'
'Is alles wat gedrukt staat ook waar?'
'Nee, maar dit wel.' (...)
Dan ga ik even over op de uitleg van deze wijsgerige kwestie. Ik neem iets uit een ander hoofdstuk van het eerder genoemde boek.

×	10	9	19
10			
8			
18			342

×	20	−1	19
20			
−2			
18			342

Figuur 4

'Kijk,' zeg ik, 'wat we vroeger op de basisschool deden $(10 + 9) \times (10 + 8) = \ldots$ moet natuurlijk ook in de brugklas doorgaan.' Of: wat vroeger in $\mathbb{N}$ gold, moet ook in $\mathbb{Z}$ gelden. Aha, de permanentie van rekenregels, of het algebraïsche permanentieprincipe, dacht ik trots. Annemarie gaat goed met me mee. Zou ze het echt door hebben? 'Hoe werken jullie nu op school?' vraag ik vervolgens.
'Nou,' zegt Annemarie, 'we praten niet meer over die heks. Soms gebruik ik het nog bij dingen zoals $5 - -8$, maar bij maal-sommen niet. Dan doe ik gewoon de truc.' En ze wijst in het boek aan waar die staat:

×	pos	neg
pos		neg
neg		

Figuur 5

Net zoiets als u net deed, met 19×18 (...)

Beste Buurman

Bovenstaande ontboezeming werd in eerste instantie geschreven voor Annemarie. Ik verwachtte dat een dergelijke confrontatie met het eigen leren haar zelfvertrouwen goed zou doen en haar mogelijkerwijs zou aanzetten tot enige reflecties op de wiskundige problematiek. Hoe dat precies is afgelopen, kan ik niet zeggen, want Annemarie is op eigen kracht verder gegaan. Ze heeft, op mijn verzoek, nog wel het verhaal van de treintjes opgeschreven.

Enige tijd nadien kwam er wel een interessante reactie van haar wiskundeleraar, die het bovenstaande verhaal van Annemarie ook had mogen lezen. Wat deze collega schreef, natuurlijk ook op proefwerkpapier van de school en 'in alle haast', laat ik hier onverkort volgen.
'Beste Buurman', zo luidt de aanhef, de paragraaf over Annemarie en de negatieve getallen heb ik met veel plezier gelezen. Ik ben benieuwd naar de overige paragrafen. Hoewel ik er niet toe kom om naast een volle baan (als enige van de tien wiskundedocenten op onze school) nog bijlessen aan te nemen, herken ik de ervaringen, die je samen thuis rond de tafel hebt. Ik zou bijna een keertje géén nee gaan zeggen.
Bij Annemarie is een positieve ontwikkeling op gang gekomen. Hoewel ze het af en toe nog een beetje benauwd heeft, weet ze veel beter dan in het begin van het jaar met haar problemen om te gaan. Ze is zover dat ze uit haar bankje durft te stappen wanneer ze er niet uitkomt. Als het antwoord de problemen niet wegneemt, zegt ze het gelukkig ook.
Ik zal deze week haar ouders bellen, want de vraag komt nu naar voren, of ze al zover is dat ze alleen door kan gaan. Een tussenweg lijkt mij het verstandigst.
Hoewel het rekenen met negatieve getallen voor vrijwel alle leerlingen goed afloopt, hetzij als kunstje (waarbij het begrip veelal in een later stadium verworven wordt) hetzij met inzicht, heb ik tegen de presentatie in ons boek toch wel enige bezwaren. Er gebeurt mijns inziens te veel in te korte tijd. Het laat de zwakke leerlingen in een zekere verwarring achter. Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen plus een portie breuken in 14 dagen is niet niets.
De strategie met het negatieve treintje dat achteruit rijdt wil er bij de leerlingen niet in. Zij worden thuis gelukkig (?) meteen op een ander spoor gezet. Min maal min is plus. Dan weet je wat je hebt. Probeer dat maar eens tegen te houden! Mijn verhaal over 3 maal 2 koude blokjes eruit halen horen ze beleefd aan, maar de meesten denken waarschijnlijk 'Waarom zou hij zo moeilijk doen, als het sneller met de tekenregels kan'.
Ik had liever gezien dat dit hoofdstuk over twee hoofdstukken verdeeld was, met enige bezinkingstijd ertussen om zo de zwakke leerlingen een kans in 2e termijn te gunnen. Telescoped reteaching, ik heb nog didactiek gehad van Van Hiele.
Voor de mavo-leerlingen van nu (dat zijn voor een groot deel de lbo-leerlingen van vroeger) zijn de problemen met dit boek mijns inziens onverantwoord groot. De strategie '3 koude blokjes erbij doen is hetzelfde als 3 warme blokjes er uit halen', is voor hen opzichzelf al een hindernis, laat staan dat dit voor hun een steun kan zijn.
We zijn op deze school benieuwd hoe de leerlingen die met deze methode zijn opgeleid het in de bovenbouw zullen gaan doen. Dit geldt voor zowel de enthousiaste voorstanders als voor de meer bedachtzame collega's. De appreciatie loopt met het niveau van de verschillende schooltypen mee: vwo enthousiast, havo bezorgd, mavo heeft het na de brugklas nog niet durven doorzetten.

Annemarie en haar leraar laten ons met een belangrijke vraag zitten. Zouden probleemgeoriënteerd wiskunde-onderwijs en realiteitsgebonden leergangen eerder aan goede dan aan zwakke leerlingen ten goede komen?

Noot

1 Deze groep, OGLO, publiceerde al eerder iets van het werk in de *Nieuwe Wiskrant*, jaargang 5, nr. 1, 1985: 'Oneindig als wiskundig begrip'.

Cijfer:

Naam: Anne-Marie

Vak:

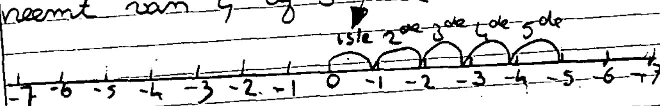
Klas:

Datum:

Je kan sommetjes maken met behulp van
een treintje die op de rails rijdt (stapt)

Voor je die sommetjes kan maken moet je wat
afspraken weten.

Als er staat 3x2 dan betekend dat 3 stappen
van 2
Het eerste cijfer zegt hoeveel stappen je neemt
Het tweede cijfer zegt hoe groot je de stappen
neemt van 4 of 5 enz



Als het hoeveelheid stappen + is moet je vooruit
Als het hoeveelheid stappen - is moet je achteruit

Je hebt 2 soorten treintjes
het positieve en het negatieve treintje
het positieve treintje gebruik je bij de
sommetjes 3x2 begint bij 0 rijdt vooruit
-3x2 begint bij 0 en rijdt achteruit
het negatieve treintje gebruik je bij de
sommetjes 3 x -2 begint bij 0 rijdt vooruit naar
links
-3 x -2 begint bij 0 rijdt achteruit
naar links

Je weet nu waarom (b.v) 3 x -2 = -6 is.

'Het verhaal over negatieve getallen', verteld door Annemarie op 11 december 1985.

Examenopgaven wiskunde B 1986

Op verzoek van lezers plaatsen we hierbij alsnog de opgaven ruimtemeetkunde van het examen vwo wiskunde B 1986

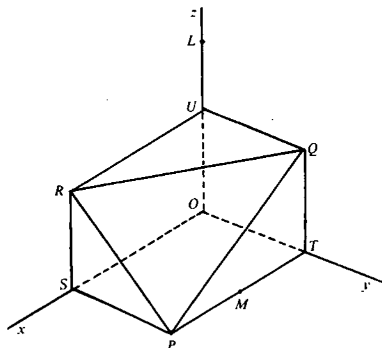
Eerste tijdvak

4 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ zijn gegeven de punten $P(6, 4, 0)$, $Q(0, 4, 3)$ en $R(6, 0, 3)$.

a In het punt $L\,(0, 0, 5)$ bevindt zich een puntvormige lichtbron.
Die lichtbron werpt een schaduw van driehoek PQR op het Oxy-vlak.
Bereken de oppervlakte van die schaduw.

b De lichtbron wordt verplaatst langs de z-as zodanig dat de schaduw van driehoek PQR op het Oxy-vlak een lijnstuk wordt.
Construeer de nieuwe plaats van de lichtbron op de z-as en bereken de coördinaten van dat punt. Gebruik hierbij het antwoordblad.

c De punten P, Q, R vormen tezamen met O, $S(6, 0, 0)$, $T(0, 4, 0)$ en $U(0, 0, 3)$ de hoekpunten van een afgezaagd blok.
Het punt M is het midden van het lijnstuk PT.
Het vlak door M en de z-as snijdt het afgezaagde blok volgens een vijfhoek.
Teken de doorsnede-vijfhoek op ware grootte en bereken de oppervlakte van die vijfhoek.



Normering:

4

a	8	voor LR snijdt de x-as in $R'(15, 0, 0)$	2
		voor LQ snijdt de y-as in $Q'(0, 10, 0)$	2
		voor de schaduw is driehoek $PQ'R'$	1
		voor de oppervlakte van driehoek $PQ'R'$ is 15	3
b	7	voor het inzicht dat de lichtbron in vlak PQR ligt	2
		voor de constructie	2
		voor de coördinaten van de lichtbron $(0, 0, 6)$	3
c	8	voor $OM = 5$	2
		voor de lengte van de snijlijn van de doorsnede met driehoek QRU is $3\frac{1}{3}$	2
		voor de tekening	2
		voor de oppervlakte is $13\frac{3}{4}$	2

Tweede tijdvak

4 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ zijn gegeven de punten $A(4, 1, 0)$, $B(8, 4, 0)$, $C(5, 8, 0)$ en $D(1, 5, 0)$.
Vierhoek $ABCD$ is het grondvlak van een kubus $ABCD.EFGH$ waarvan de hoekpunten E, F, G en H boven het Oxy-vlak liggen.

a De lijn AH snijdt het Oxz-vlak in punt P en het Oyz-vlak in punt Q.
Teken het lijnstuk PQ op ware grootte.

b De middelpunten van de zes zijvlakken van de kubus zijn de hoekpunten van een regelmatig achtvlak.
Bereken de inhoud van dat achtvlak.

c Teken ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy vierhoek $ABCD$.
Voor elke t tussen 1 en 8 snijdt het vlak $x = t$ de kubus volgens een veelhoek $V(t)$.
Teken ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel OtV de grafiek van de oppervlakte van veelhoek $V(t)$ als functie van t.
Neem 1 cm als eenheid langs de t-as en 0,2 cm als eenheid langs de V-as.

Normering:

4

a	7	voor het inzicht dat P ligt op de snijlijn van vlak ADH en het Oxz-vlak en Q op de snijlijn van vlak ADH en het Oyz-vlak	2
		voor de constructie	5
b	8	voor het inzicht dat het achtvlak uit twee vierzijdige piramiden bestaat	2
		voor de hoogte van zo'n piramide is $2\frac{1}{2}$	2
		voor de oppervlakte van het grondvlak is $12\frac{1}{2}$	2
		voor het antwoord $20\frac{5}{6}$	2
c	8	voor de tekening van vierhoek $ABCD$	1
		voor de oppervlakte is $31\frac{1}{4}$ voor $t \in [4, 5]$	2
		voor de oppervlakte stijgt lineair voor $t \in \langle 1, 4 \rangle$	1
		voor de oppervlakte daalt lineair voor $t \in \langle 5, 8 \rangle$	1
		voor de grafiek	3

Nieuwe didactische wiskundelijnen

Anne van Streun

Een terugblik

In 1968 werd de nieuwe structuur van het voortgezet onderwijs (de mammoetwet) in Nederland ingevoerd. Hoewel veranderingen in onderwijsstructuren zelden of nooit tot beter onderwijs hebben geleid werd deze gelegenheid aangegrepen om een nieuw leerplan, het huidige, voor het vak wiskunde te ontwerpen. Door de geest van de tijd beïnvloed kregen verzamelingen en relaties in het leerplan een sterk accent met de hiermee geïntroduceerde nieuwe taal, waarin je alles wiskundig veel preciezer kon formuleren, werd een beter begrip bij de leerlingen verwacht.
Slechts enkele dwarsliggers sputterden tegen. Van Hiele vond het didactisch een achteruitgang. Freudenthal beschouwde de kwestie van de nieuwe leerstof als secundair. (Euclides 15-7-1968.) 'Moderne programma's' – zo schreef hij – 'moeten m.i. allereerst dienen om het onderwijs methodisch en didactisch te verbeteren. Kan men dit niet verwezenlijken, dan zijn de nieuwe programma's erger dan de oude. Ik heb de indruk dat men in Nederland met voldoende beleid is gaan en gaat moderniseren, om op dit punt werkelijk successen te behalen.'
N. G. de Bruyn formuleerde in Euclides (1-5-1968) fundamentele kritiek, die in het licht van de huidige ontwikkelingen bijzonder actueel is. Enkele citaten kunnen volstaan. 'Het voorgestelde wiskundeprogramma voor de verschillende schooltypen lijkt minder op de maatschappij afgesteld te zijn dan zulks 50 jaar geleden het geval was'. 'Het blijkt dat nog steeds, of zelfs meer dan vroeger het geval was, de wiskundeprogramma's als uiterst ideaal hebben om de middelbare scholier op te leiden tot student in de wiskunde om daar via een zo zuiver mogelijke opleiding te worden gevormd tot leraar in de wiskunde, die vervolgens een nieuwe generatie van leerlingen op dezelfde wijze probeert te beïnvloeden. Hoewel wij juist in een tijdperk zijn aangekomen waarin de wiskunde grote maatschappelijke betekenis heeft gekregen en getreden is buiten de traditionele toepassingsgebieden, vinden wij dat niet weerspiegeld in de voorgestelde programma's.'
'Men krijgt de indruk dat de commissie niet of nauwelijks is beïnvloed door verlangens die in niet-wiskundige kringen leven.'
Het leerplan werd ingevoerd. De interpretatie van het leerplan in de toelichting accentueerde de opbouw op basis van de verzamelingen en relaties met de bijpassende taal. De Nederlandse bewerking van de Schotse methode 'Modern Mathematics' werd een groot commercieel succes en bepaalde lange tijd het gezicht van het wiskundeonderwijs. Een enkeling pleitte tevergeefs voor de meer toegepaste benadering van het Engelse 'School Mathematics Project', dat de inhoud van het gemoderniseerde Engelse wiskundeonderwijs bepaalde. Op veel plaatsen, onder andere in Euclides, bestreed Freudenthal sindsdien de nadruk op verzamelingen en relaties. In het rekenonderwijs op de lagere school slaagde de WISKOBAS-groep er in om deze vloedgolf tot staan te brengen. Dan liever nog even doorgaan met de klassieke rekenboekjes...

Wat is er nu aan de gang?

De wereldwijde reactie op de 'New Math' liet geen tien jaar op zich wachten. De gebruikers van wiskunde kunnen er niet mee uit de voeten. De Bruyn kreeg gelijk, ook in zijn voorspelling dat 'zulke programma's een lang en taai leven leiden'. De bovenbouw havo-vwo is in beweging. In wiskunde A (vwo) speelt het 'moderne' taaltje geen rol. De meetkunde, waaronder de ruimtemeetkunde, moet veel meer aandacht krijgen (HEWET, HAWEX). Natuurwetenschappelijke en technische toepassingen horen in wiskunde B thuis (HAWEX). Onder druk van de gebruikers van wiskunde in het hoger onderwijs is eerst de bovenbouw in havo en vwo aangepakt. Dat lijkt op nieuwe wijn in oude zakken. Want alle wiskundemethoden voor 12-16 jaar gaan nog uit van de leerstoflijnen die na 1968

gemeengoed werden. Er zijn nieuwe lange leerstoflijnen nodig, in plaats van het toevoegen van contextproblemen als instappers, het bezuinigen op de notatiecultus en het verrijken van de methoden met wat toepassingen en ruimtelijke opgaven. Het I.O.W.O. heeft met haar leerstofpakketjes voor 12-16 jarigen baanbrekend werk verricht. De S.L.O. probeert dat werk voort te zetten. Maar een totaalconcept voor het gehele wiskundeonderwijs ontbreekt. Nog geen enkele commissie of enig auteursteam heeft nieuwe vergaande lijnen van wiskundeonderwijs uitgezet, die hun oorsprong vinden in het basisonderwijs en doorlopen tot het hoger onderwijs.

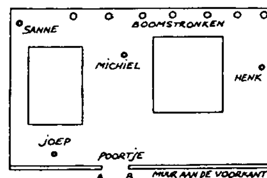
In het buitenland is het Engelse SMP daar m.i. het verst mee. De franje van relaties en verzamelingen uit de oude SMP-boeken is weggepoetst en voor de leeftijdsgroep van 11-16 jaar zijn nieuwe didactische lijnen beproefd en in leerlingenteksten uitgewerkt. Bij het ontwikkelen van Wiskunde Lijn heb ik daarvan gebruik gemaakt als het ging om materiaal voor de onderbouw van havo-vwo en mavo-lbo. Die nieuwe didactische wiskundelijnen zijn voor het hele Nederlandse wiskundeonderwijs de moeite van het overwegen waard. Met name omdat het theezakjesprincipe, waarbij programma's worden afgeleid van de programma's van moeilijker schooltypes, totaal is verlaten. Voor het lbo-mavo een uitkomst, denk ik.

De vlakke meetkundelijn

De 'Elementen' van Euclides hebben als schoolboek afgedaan. De transformaties zijn geen doel op zich, maar slechts een selectie uit mogelijke meetkundige methoden. Meetkundige wereldoriëntatie is meer dan transformatiemeetkunde. Meetkundige wereldoriëntatie is bij uitstek wiskunde voor alle schooltypen, omdat het vol zit met meetkundige situaties die zowel materieel als mentaal kunnen worden aangepakt. Wat is de lijn in die meetkundige wereldoriëntatie? Van het tekenen van lijnen en cirkels naar het lezen van kaarten en plattegronden.

Gebruik je liniaal op de plattegrond hiernaast om de vragen te beantwoorden.

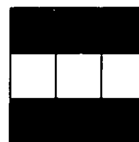
(a) Kan Michiel Sanne zien?
(b) Kan Sanne Joep zien?
(c) Kan Henk Joep zien?
(d) Hoeveel boomstronken kan Michiel zien?
(e) Hoeveel boomstronken kan Henk zien?
(f) Welke kinderen kunnen het poortje zien?
(g) Er komt een man langs. Hij blijft bij het poortje staan. Hij kan drie boomstronken zien. Staat hij bij A of bij B?



Figuur 1

Van lijnspiegelen met een spiegel naar mentaal spiegelen en symmetriepuzzels.

14
Teken dit vierkant na.



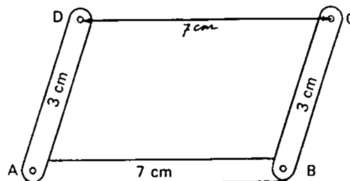
(a) Hoeveel symmetrie-assen heeft het patroon?

(b) Verwissel twee tegels zó, dat het patroon maar één spiegelas heeft. Teken het nieuwe patroon op ruitjespapier. Geef de symmetrie-assen in de figuur aan.

Figuur 2

Zoals de spiegel concreet handelen bij het lijnspiegelen mogelijk maakt, helpen de strips bij het onderzoek van meetkundige vormen. Zoals bij de parallellogramconstructie.

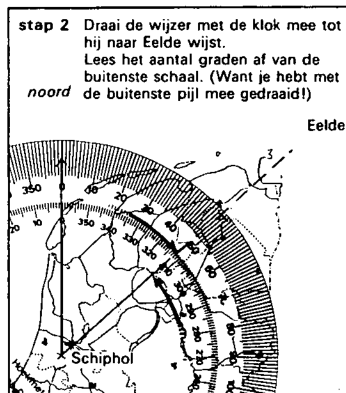
Zorg ervoor dat de strippen in A, B, C en D vrij kunnen draaien.



(b) Beweeg AB heen en weer. Schrijf op hoe AB beweegt.
(c) Teken op de ondergrond de baan van punt A.
(d) Teken ook de baan van punt B.
(e) Teken de baan van het midden M van AB.

Figuur 3

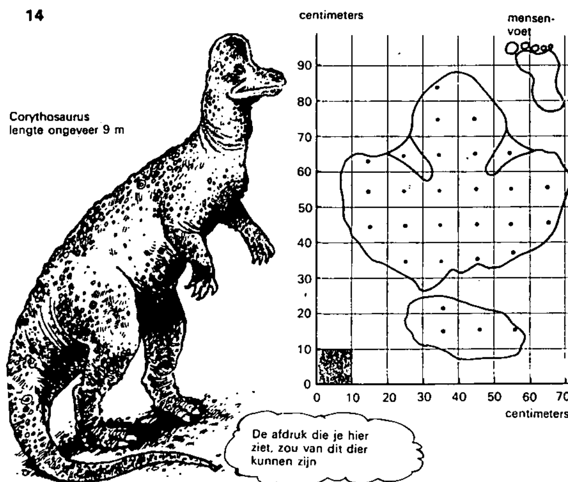
Hoeken in de werkelijkheid hebben meer te maken met koersen dan met driehoeken.
Een didactisch hulpmiddel in de vorm van de hoekmeter is dan onmisbaar.



Schrijf op:
De koers Schiphol naar Eelde is ...

Figuur 4

De meetlijn-oppervlakte uit het basisonderwijs moet worden voortgezet, waarbij de oppervlakteformules niet centraal staan.



Figuur 5

Het tekenen op schaal, het vergroten of verkleinen met puntvermenigvuldiging, meetkundige transformaties, symmetrische patronen, de stelling van Pythagoras, het zijn allemaal onderwerpen die tot deze meetkundige wereldoriëntatie behoren.

De voortgezette rekenlijn

Het leren rekenen met getallen en het ontwikkelen van het getalbegrip is niet afgesloten met het einde van het basisonderwijs. Een voortgezette rekenlijn is geen herhaling van het rekenprogramma op de basisschool, maar een opnieuw doordachte leerstoflijn, die ook rekening houdt met de maatschappelijke realiteit van de rekenapparatuur.
Het hoofdrekenen vormt een prima aanleiding om terug te kijken op de principes van het rekenen met natuurlijke getallen. De begrippen breuk en decimaal getal worden voor veel leerlingen gerenoveerd, terwijl anderen nieuwe terreinen onderzoeken.

14
Probeer nu eens $\frac{3}{7}$ te schrijven met stambreuken.
Dat gaat niet zo gemakkelijk.

TIP:
Verander de breuk in een gelijkwaardige breuk:

$\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ Kijk of je $\frac{6}{14}$ kunt splitsen.
Nog steeds moeilijk!

Deze dan: $\frac{6}{14} = \frac{18}{42}$

Haal een zo groot mogelijke stambreuk eruit.

$\frac{18}{42} = \frac{14}{42} + \frac{3}{42} + \frac{1}{42} = \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$

Dus: $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$

Figuur 6

Negatieve getallen worden in praktijksituaties geïntroduceerd en in allerlei situaties toegepast. De verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ worden terloops benoemd, evenals de rekenwetten. Breuken, decimaalgetallen en vooral procenten vragen veel aandacht wegens hun toepassingsbereik. Wortels komen als lengten tevoorschijn.
Het aanvaarden van de rekenmachine als een maatschappelijke realiteit betekent een vroegtijdige introductie (leerjaar 2) van het rekenapparaat in de klas. Het vooraf schatten van de orde van grootte van het antwoord en het achteraf controleren van

de orde van grootte van de uitkomst moeten vroeg gewoonten worden.

14
Hoe reken je 58,37 × 3,29 uit?

Maak eerst een schatting.
Daarvoor moet je de getallen afronden. 58,37 wordt 60 3,29 wordt 3
Dus 58,37 × 3,29 is ongeveer 60 × 3 = 180.
Reken het nu uit met je rekenmachine.

Figuur 7

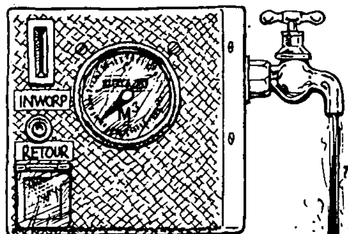
Na leerjaar 3 is de voortgezette rekenlijn volledig geïntegreerd in de andere lijnen. Alleen voor de ibo-lbo populatie verdient het de voorkeur nog afzonderlijke rekenhoofdstukjes aan te bieden.

De functielijn

Variabelen, grafieken en functies raken in de loop van de eerste leerjaren steeds meer vervlochten. De machientjestaal bij het ontdekken van regels in het eerste leerjaar heeft zijn vervolg in de formuletaal van leerjaar 2.

Grafieken en machientjes

10

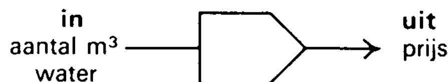


Het waterleidingbedrijf brengt haar klanten voor geleverd water ƒ 0,75 per m³ (kubieke meter) in rekening.

(a) Neem deze tabel over en vul hem verder in. Vertel in je eigen woorden hoe je rekent.

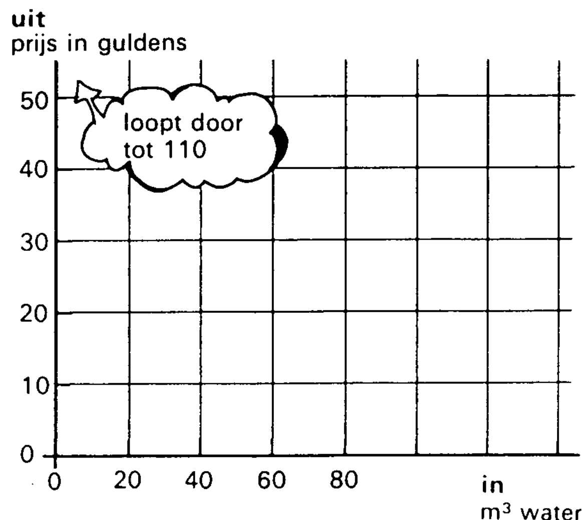
aantal m³	prijs
1	ƒ 0,75
20	
40	
60	
80	
100	
120	
140	

(b) Je kunt bij deze berekening ook een machientje tekenen.
Neem over en vul in:



(c) Schrijf de gevonden m³ water en de prijzen die erbij horen, in de vorm van getallenparen.
Bijvoorbeeld: (1; 0,75).

(d) Neem deze assen over en teken de getallen erin.



Figuur 8

De grafieken van door tabellen vastgelegde verbanden uit leerjaar 1 lopen door naar de grafieken van door formules vastgelegde verbanden.
Het gebruik van letters voor variabelen wordt bij vergelijkingen voorafgegaan door het ? in plaats van x. Die x of y of ... komt in leerjaar 2.

11



Figuur 9

Pas in leerjaar 3 is de functienotatie $x \rightarrow \ldots$ en $f(x) = \ldots$ nuttig, als aanvulling op de andere beschrijvingen van een functie:

de functie in termen van een situatie
de functie in tabelvorm
de functie als grafiek
de functie in de vorm van een formule.

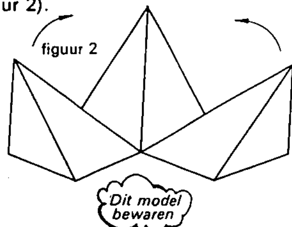
De wendbaarheid van het functiebegrip in de verschillende toepassingsgebieden en binnen de wiskunde is nu optimaal aanwezig. Specifieke functies, zoals tweedegraadsfuncties zijn nu met het beschikbare gereedschap te analyseren.

De ruimtemeetkundelijn

Bekend is natuurlijk het maken en onderzoeken van (uitslagen) van ruimtelijke figuren. Niet alleen de overbekende balken en piramides, maar ook een regelmatig achtvlak, het ruitentwaalfvlak en de regelmatige veelvlakken mag je brugklassers niet onthouden. Uiteraard gekoppeld aan allerlei wiskundige activiteiten zoals systematisch tellen, redeneren, inhouden berekenen enz..

Een belangrijk aspect van de ruimtemeetkunde is het ontwikkelen van ruimtelijk inzicht, het leren kijken, het leren interpreteren van tekeningen, het maken van aanzichten e.d. Op de leeftijd van 12-14 jaar kan het ruimtelijk inzicht zich goed ontwikke-

Plak de drie piramides uit som 5 met hun grondvlakken op de uitgeknipte tekening. Je kunt nu de kubus open en dicht vouwen (zie figuur 2).

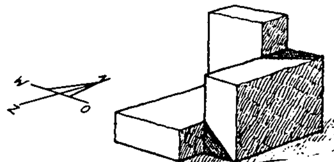


De inhoud van een kubus met ribbe 5 cm is $5 \times 5 \times 5 = 125$ cm^3.

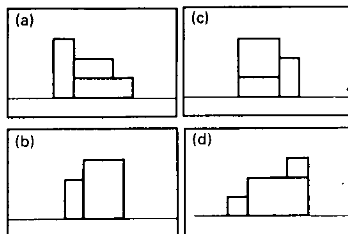
Wat is de inhoud van één piramide?

Figuur 10

34
Dit is een model van een ziekenhuis.
Zet de drie lucifersdoosjes op de plattegrond op je werkblad.



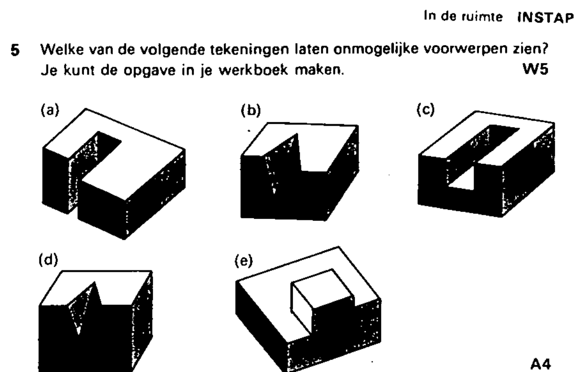
Vanuit welke richting kijk je ernaar, als je de volgende aanzichten ziet?



Figuur 11

len, mits voldoende ervaringen worden opgedaan. Weer is het kunnen materialiseren van de situaties essentieel, voordat de stap naar het mentale handelen wordt gemaakt.

De inhouden van ruimtelijke figuren horen bij deze wereldoriëntatie in de ruimte, evenals het tekenen volgens enkele projectiemethoden (respectievelijk leerjaar 2 en leerjaar 3). De algemene ruimtelijke vorming wordt in 4-vwo afgesloten met de studie van onmogelijke figuren, afstanden, hoogtelijnen en symmetrieën van ruimtelijke modellen.


In de ruimte INSTAP

5 Welke van de volgende tekeningen laten onmogelijke voorwerpen zien?
Je kunt de opgave in je werkboek maken. W5

(a) (b) (c)

(d) (e)

A4

Figuur 12

25 Op een mooie zomerdag zitten Stella en Fred elk aan een kant van een kegelvormige zandhoop in de zandbak.
De straal van de grondcirkel is 0,7 meter. De lijnen van de top naar de grondcirkel zijn 1 meter lang.



(a) Wat is de kortste weg van S naar F? H4
(b) Bereken de lengte van die kortste weg SF. A14

Figuur 13

De toegepaste lijn

In het al eerder geciteerde artikel in Euclides (15-7-1968) twijfelde Freudenthal hardop aan de waarde van op toepassingen gericht wiskundeonderwijs, wegens het gevaar van de geringe flexibiliteit van zo'n vak toegepaste wiskunde. Wie zich de kranensommen, arbeidsommen en ander toegepaste rekensommen uit de oude doos nog herinnert, begrijpt die twijfel. Het gevaar is groot dat de leerstof wordt verdeeld in typen sommen, voor elk type een paragraaf, waarna met die typen sommen wordt geoefend. Een toegepast probleem met dezelfde wiskundige kern maar een andere context wordt als nieuw en moeilijk ervaren, omdat de opgaven naar toepassingsbereik zijn bestudeerd en gememoriseerd.
Wie de nieuwe leerboeken voor wiskunde A bestudeert, ziet dat dit gevaar van typologie van toepassingen en geringe wendbaarheid van wiskundige kennis niet denkbeeldig is. De training per paragraaf op één type wiskundige techniek is soms vervangen door de oefening per type toepassing. Niet de dieper liggende structuur van de wiskundige begrippen en methoden vormt dan de kern van het kennisbestand van de leerlingen, maar de oppervlaktestructuur van de typologie van opgaven. Er is m.i. maar één alternatief voor het onderwijzen van wiskunde, die breed toegepast kan worden. Wie mijn onderzoek kent, zal niet verrast zijn: namelijk leerlingen leren problemen aan te pakken en op te lossen.

Een rol papier gaat door twee onbetrouwbare drukpersen. De eerste machine drukt in zwart. De kans dat die drukpers niets afdrukt is $\frac{1}{4}$.
De tweede machine drukt in rood. De kans dat het mis gaat is $\frac{1}{6}$.
Wat is de kans dat het papier met maar één kleur wordt bedrukt?



WAT IS ER AAN DE HAND ?
WAT VOOR TOEVALSEXPERIMENT IS DIT ?

Het is een samengesteld toevalsexperiment dat bestaat uit twee onafhankelijke deelexperimenten met kansen $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{6}$.

WAAR IS DE GEBEURTENIS G UIT OPGEBOUWD?

WAT ZIJN DE KANSEN OP DE VERSCHILLENDE UITKOMSTEN ?

DE VRAAG BEANTWOORDEN.

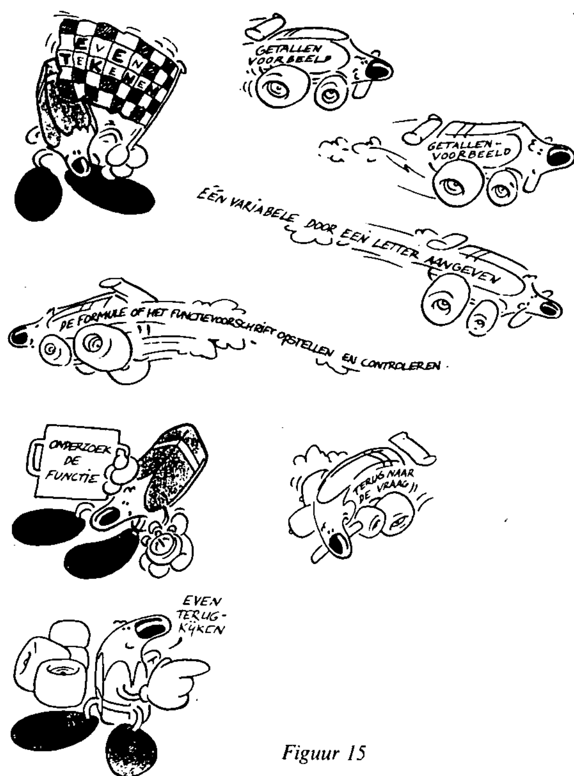
WAT IS NU DE GEVRAAGDE KANS ?

Figuur 14

De rol van de docent(e) is daarbij (weer) essentieel. Welke vragen stelt zij/hij? Welke methoden bena-

drukt zij/hij? Heel specifieke oplossingsmethoden, alleen te gebruiken voor één type opgave, of ook algemene denkmethoden? De lange lijn in de probleemaanpak kan helpen. Door alle leerjaren van Wiskunde Lijn heen wordt aandacht besteed aan de manier waarop een probleem kan worden aangepakt of bevraagd. Impliciet in de eerste leerjaren, expliciet in de bovenbouw met de systematische probleemaanpak (SPA).

Van een situatie naar een wiskundig model en terug



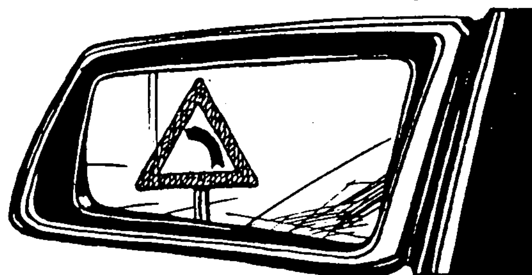
Figuur 15

Nieuwe didactische wiskundelijnen

Een vernieuwd wiskunde-leerplan moet niet weer volgens het theezakjesprincipe worden opgezet. Het leerplan voor 12-16-jarigen moet zijn zin namelijk niet ontlenen aan de bovenbouw vwo. De havo-bovenbouw mag geen aftreksel zijn van de vwo-bovenbouw. Didactische wiskundelijnen moeten vanaf de basis opnieuw worden doordacht. Het programma voor de eerste twee leerjaren dient voor de gehele breedte van de leerlingenpopulatie te volgen te zijn. Ook de afhakers na mavo-3 en de leerlingen op AB-niveau van het lbo moeten die eerste jaren zinvol wiskundeonderwijs krijgen. Juist ook voor hen zou de betekenis van wiskunde duidelijk moeten zijn. Een dergelijk programma kan gecombineerd worden met de noodzakelijke aansluiting op de havo-vwo bovenbouw en zelfs op de CD-examens. (Overigens blijf ik van mening, dat de notaties op het CD-examen sterk vereenvoudigd moeten worden.) Noodzakelijke voorwaarde is dat er nieuwe didactische wiskundelijnen worden ontworpen en uitgewerkt. Het School Mathematics Project 11-16 laat in de dagelijkse schoolpraktijk zien dat het kan. Op scholen waar *Wiskunde Lijn* wordt gebruikt, zag ik het ook gebeuren. Herkenbaar, voorstelbaar, interessant en boeiend. Zo wordt de wiskunde ervaren. De ibo-lbo-leerlingen krijgen hun eigen programma voor het AB-niveau, dat hen helpt meer greep te krijgen op de werkelijkheid om hen heen. De havo-vwo leerlingen ervaren geen breuk meer tussen de onderbouw en de HEWET-HAWEX-bovenbouw. Nog even en het CD-examen wordt weer een zinvolle afsluiting van zinnig wiskundeonderwijs. Wie helpt het CD-examen door de bocht?

12

Een chauffeur ziet dit bord in zijn



buitenspiegel net nadat hij een bocht heeft genomen.
Was dat voor hem een bocht naar rechts of een bocht naar links?
(Teken de weg en de auto maar eens.)

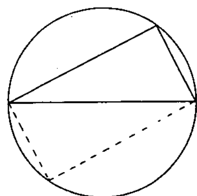
Figuur 16

Historische sprookjes

Hans Freudenthal

In zijn 'Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik' citeert M. Cantor de Griekse filosoof Demokritos (± 420 v. Chr.), die gezegd zou hebben: 'In de constructie van lijnen met het oog op uit veronderstellingen te trekken conclusies heeft niemand me overtroffen, zelfs niet de zogenaamde harpedonapten der Egyptenaren'.[1] Harpedonapten moeten koordespanners of -knopers zijn. Het is plausibel dat bij het leggen van de fundamenten en de bouw van tempels koorden te pas kwamen om gespannen te worden en Cantor geeft er ook heel wat bewijsplaatsen voor. Maar dan ineens neemt hij een vreemde draai:
'Laten we eventjes, hoewel tegenwoordig nog zonder enige grondslag (Begründung), veronderstellen dat de Egyptenaren ervan wisten dat er drie zijden 3, 4, 5 tot een driehoek verbonden er een van een rechte hoek tussen de twee kleinere vormen', zegt hij om dan te vervolgen met de conclusie dat het de taak van de harpedonapten zou zijn geweest, rechte hoeken door middel van zulke 3-4-5-driehoeken te construeren. Zo gaat Cantor nog een hele poos door, maar doet verder niets om op dat 'hoewel tegenwoordig nog zonder enige grondslag' terug te komen. Het valt dus niet te achterhalen wat Cantor met deze frase eigenlijk heeft bedoeld. Had hij met het 'tegenwoordig' willen anticiperen op toekomstige papyros-vondsten die dat zouden kunnen bevestigen.[2] Voorzover mij bekend, ontbreekt nog hedentendage elk spoor dat de Egyptenaren de 'Pythagoras' ook maar in de bescheidene vorm van de 3-4-5-driehoek kenden (in tegenstelling tot de Babyloniërs van wie we zelfs hele tafels 'Pythagorese driehoeken' bezitten).
Maar niemand die er zich iets van aantrekt! Cantor's voorbehoud is al lang vergeten. In alle populaire boeken over geschiedenis van de wiskunde is het een vaststaand feit dat de Egyptische harpedonapten rechte hoeken spanden door middel van koorden die in de verhouding 3 : 4 : 5 verdeeld waren, en geen kritiek kan het opnemen tegen dit sprookje, want op elke criticus komen er tenminste tien kritiekloze navertellers. Nu zijn er veel oudere wiskunde-sprookjes die al zo hecht vastgeklonken zijn in de wiskundige terminologie, dat men zich er echt niet meer druk om zou moeten maken en proberen ze uit te roeien. Allereerst dat van 'Pythagoras' – ik bedoel de stelling en niet de mens van die naam. Die heeft vermoedelijk echt bestaan, op Samos geboren, stichter van een sekte, die naar hem vernoemd is, in Zuid-Italië (± 470 v. Chr.) overleden. Of hij iets met wiskunde te maken heeft gehad en zo ja wat, weten we gewoonweg niet. Nog Aristoteles (4e eeuw voor Chr.) noemt hem alleen als wonderdoener. Proklos, een millenium nà Pythagoras, vermeldt in zijn commentaar op Euclides dat sommigen de 'stelling van Pythagoras' aan Pythagoras toeschrijven zonder zelf positie te kiezen. Welbekend is ook de geschiedenis van de hekatombe (het 100-offer) die Pythagoras zou hebben gebracht naar aanleiding van de ontdekking van 'de Pythagoras'. De Duitse schrijver Börne knoopte er zijn 'Aphorismus 258' aan vast: 'Toen Pythagoras zijn bekende stelling ontdekte, bracht hij de goden een hekatombe. Sindsdien sidderen alle ossen wanneer een nieuwe waarheid wordt ontdekt'. Nu schijnt het verhaal omtrent een wiskundige die de goden voor een ontdekking met een offerande dankte, al oud te zijn.
Een epigram dat dankzij een curiositeitenverzamelaar uit de 2e eeuw na Chr. overgeleverd is, noemt wel Pythagoras in verband met dat offer, maar zonder van een hekatombe te spreken en zonder de bedoelde stelling te identificeren met wat wij 'de Pythagoras' noemen. Wie die erin heeft gebracht, is onbekend. Trouwens, Pythagoras was vegetariër en verafschuwde dieroffers. Zijn sekte splitste zich later in de 'akousmatici' en de 'mathematici' en aan een uit de tweede groep zou men wellicht de stelling van Pythagoras kunnen toeschrijven, zij het dan als herontdekking van wat de Babyloniërs al veel eerder wisten.
De eerste wiskundige die we bij naam en toenaam kennen heette Thales van Milete. Vanouds worden

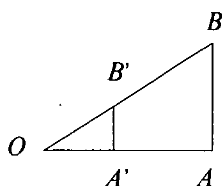
hun heel wat meetkundestellingen toegeschreven en dan merkwaardigerwijs allemaal stellingen die iets met symmetrie hebben te maken. In het Duits is 'de Thales' de stelling van de rechte hoek als omtrekshoek in de halve cirkel. Dat is nog niet zo gek want het eenvoudigste bewijs is door middel van symmetrie (zie bijvoorbeeld figuur 1).



Figuur 1

In het Frans is 'Thalès' daarentegen de stelling omtrent de verhouding van de rechthoekszijden in homothetische rechthoekige driehoeken (Figuur 2):

$AB : A'B' = OA : OA'$.



Figuur 2

Deze benaming gaat terug op een overlevering volgens welke Thales, tot verbazing van de Egyptenaren, de hoogte van pyramides bepaald zou hebben door hun schaduw met die van een verticale staf te vergelijken. Maar volgens die overlevering deed Thales dat op het ogenblik van de dag toen staf en schaduw even lang waren en dit zou betekenen dat hij het niet met gelijkvormigheid en evenredigheden beredeneerde, maar met een eigenschap van de gelijkbenige rechthoekige driehoek, dus weer met symmetrie. Maar de francofone 'Thalès' zal van deze constatering geen last krijgen.

Er zijn in de loop van de tijd zeker duizenden ontoereikende bewijzen voor de 'grote Fermat' verzonnen. Er zijn er ook vele gepubliceerd, bijvoorbeeld door Lamé in de Comptes Rendus van 1847, maar in het algemeen geschiedde (en geschiedt) dit – bijvoorbeeld door de befaamde Lindemann – op kosten van de auteur. Een gepubliceerde publikatie wordt ook aan Cauchy toegeschreven, maar voor zover ik weet, onterecht. Het is juist dat hij zich voor de 'Fermat' heeft ingespannen, maar in zijn werken heb ik geen aanspraak op een bewijs kunnen vinden. Wel heeft men kort geleden een door hem bij de Franse Akademie gedeponeerde verzegelde brief geopend die een vage aanduiding (in het Italiaans met Griekse letters geschreven) van een bewijs bevat. Maar dat lijkt dan ook alles te zijn.

Telkens wordt de bewering herhaald dat Gregor Mendel bij zijn vermaarde genetische experimenten met variëteiten van erwten gesjoemeld zou hebben. Mendel had zeven kenmerkparen in het oog gevat, één recessief en het ander dominant (bijvoorbeeld geel en groen zaad), die we zoals thans gebruikelijke met a, b, c, d, e, f, g respectievelijk A, B, C, D, E, F, G willen aanduiden. Van zaadhandelaren had hij 33 verschillende variëteiten gekocht en heel toevallig gebeurde het, dat onder die 33 voor elk van die zeven kenmerkparen er een was dat precies ten aanzien van *dit* kenmerk (en geen ander) verschilde. Een vreemd toeval – vond Bateson, gesteund door de beroemde R. A. Fisher – dat iets zo onwaarschijnlijks produceert. Dus zal Mendel wel hebben gesjoemeld – u vindt dat tegenwoordig, zonder bronvermelding, in haast elke publikatie over Mendel. Pas Van der Waerden[2] is de waarschijnlijkheid van dit 'toeval' echt gaan uitrekenen. En die bleek, zegge en schrijve, $97^1/_2\%$. Hoewel Mendel ook op andere punten thans is gerehabiliteerd, komt er geen einde aan het sprookje van de sjoemelende Mendel.

Wie kent niet de stelling van Bolzano-Weierstrass: 'Een oneindige begrensde verzameling reële getallen heeft een verdichtingspunt'. Een typisch voorbeeld voor de lofwaardige gewoonte in de wiskunde om ook voorlopers eer te bewijzen. Maar die kan zich ook misleidend uitwerken en in het onderhavige geval zijn er zelfs historici ingetrapt. Van Bolzano is de stelling afkomstig: 'Een begrensde getallenverzameling heeft een bovengrens'. Na te hebben gedefinieerd wat een continue functie is, leidt Bolzano hieruit het bestaan af van een nulpunt van een continue functie tussen twee punten waar die functie verschillende tekens heeft – hij was de eerste die zoiets niet als vanzelfsprekend aannam. Ik zou niet kunnen zeggen of Bolzano ooit het begrip 'Verdichtingspunt' heeft gekend. Bolzano's stelling is in zekere zin fundamenteler dan die van Weierstrass omtrent het verdichtingspunt en dat verklaart mis-

schien de misleidende naamgeving.
Ere wie ere toekomt! Maar dit mag er toch niet toe leiden dat je bijvoorbeeld aan Euclides de Euclidische ruimte toeschrijft, aan Descartes de cartesische ruimte en coördinatensystemen en het cartesische produkt (van twee verzamelingen) of aan Fourier alle Fourieranalyses. Toch gebeurden dergelijke dingen, bijvoorbeeld, wanneer in een voortreffelijk leerboek Riemann tot uitvinder van de integraal benoemd wordt – er is immers een bij wijze van eerbetuiging naar Riemann genoemde integraaldefinitie. In hetzelfde leerboek wordt trouwens heel wat geschiedenis van de wiskunde opnieuw uitgevonden, bijvoorbeeld Hilbert benoemd tot leerling van Felix Klein en de Hilbertruimte uit Felix Kleins meetkundige intuïtie verklaard.
Rond Archimedes zijn er heel wat aardige verhaaltjes – dat omtrent zijn dood is natuurlijk minder aardig. Het is moeilijk na te gaan hoe ver ze sprookjes zijn en of er een kern van waarheid in schuilt. Mij schiet er net een, door Vitruvius verteld, te binnen. U weet natuurlijk hoe Archimedes het naar hem vernoemde principe van de opwaartse kracht zou hebben ontdekt die een lichaam in een vloeistof ondervindt. Een goudsmit had koning Hiero van Syrakuse een gouden krans geleverd en de koning verdacht hem met het tot zijn beschikking gestelde goud te hebben geknoeid. Hiero zou aan Archimedes hebben gevraagd de zaak uit te zoeken. Archimedes, erover peinzend toen hij in het bad stapte – aldus Vitruvius – zou ineens hebben gemerkt dat hoe dieper hij instapte des te meer water over de rand van de badkuip liep. Toen zou de oplossing hem te binnen zijn geschoten en 'naakt rende hij naar huis, met luide stem verkondigende dat hij het gevraagde gevonden had. Heureka, heureka – riep hij'.
De observatie van het overvloeien heeft natuurlijk niets met het principe van Archimedes te maken. Men kon de soortelijke gewichten van goud en een goud-alliage met elkaar vergelijken door twee even zware voorwerpen van dit soort in te dompelen en te kijken hoeveel vloeistof overloopt. Er is herhaaldelijk beweerd dat deze methode te onnauwkeurig zou zijn en dat Vitruvius de pointe niet had gesnapt. Archimedes zou bij het instappen in de kuip echt hebben opgemerkt dat ingedompelde lichamen lichter worden en dientengevolge, om Hieros probleem op te lossen, thuis achter elkaar verschillende stoffen eerst in lucht en dan in water hebben gewogen.
Nu gaat Archimedes ter zake doende verhandeling alleen over 'Drijvende lichamen'. De opwaartse kracht op *ingedompelde* lichamen schijnt – ondanks twijfelachtige uitingen in de oudheid – pas in de nieuwe tijd te zijn opgehelderd. Hoe dan ook: een mooi sprookje, maar historisch van onduidelijke betekenis.
Zoals iedereen weet, ontdekte Newton de gravitatiewet toen hij een appel uit een boom zag vallen. Voltaire wist het al en heeft het verhaal verder verspreid. Klaarblijkelijk kende men sinds de zondeval anders alleen *geplukte* appels – zou men ironisch kunnen opmerken, maar dan wordt men steevast met het genie van Newton geconfronteerd dat het juist bestond uit zulk een eenvoudige observatie een hele theorie te hebben gewonnen. Het is veel geloofwaardiger te stellen dat Newton zijn hoofd veeleer gebroken heeft over het feit dat de maan *niet* op de aarde valt.
Van Newton is het maar een stap naar Einstein. In de twintiger jaren – en ook nu – stond hij er veelal bekend voor het feit dat hij zou hebben bewezen dat alles relatief is. Het lijkt misschien wat aanmatigend, maar laat ik toch sluiten met een anekdote die van mij verteld wordt maar die, helaas, te mooi is om waar te zijn. Het zou een tentamen projectieve meetkunde zijn geweest dat ik in een collegezaal voor het bord tussen de twee deuren afnam. Het zou zo erg geweest zijn dat ik tenslotte de student wanhopig vroeg: 'Teken eens een projectieve rechte lijn'. De student begon te tekenen terwijl ik hem toeriep: 'Langer, langer!' Toen hij bij de rechter deur aangekomen was, zou ik hem toegebeten hebben: 'Eruit'. Maar wie schetst mijn verbazing toen ik – menende hem kwijt te zijn – de linker deur open zag gaan en hem zag binnenkomen. Ik, verbijsterd: 'Wat moet dat?' Hij: 'De projectieve lijn is toch gesloten'. Ik zou toen het tentamenbriefje met een 'voldoende' hebben getekend.
Ik kan zweren dat die geschiedenis nooit gebeurd is. Ik heb nooit voor een bord tentamen afgenomen. Bovendien: hetzelfde verhaal werd ook al over mijn voorganger en voorvoorganger op mijn leerstoel verteld en, naar ik het verneem, ook over wiskundigen aan buitenlandse universiteiten.
Wel, ook de historische waarheid is relatief.

1 In de 3.ed., 1907, blz. 104.
2 Mendels Experimente. Centaurus 12 (1968), 275-288.

Grensgevallen IV

P. G. J. Vredenduin

1 Het primitieve stadium

Grensgevallen treden eerst op zodra men begrippen nader vanuit een wetenschappelijk oogpunt gaat analyseren. In het primitieve stadium bestaan ze niet. Zo is er voor iemand die zich nog nimmer met wiskunde heeft beziggehouden, een essentieel verschil tussen een vierkant en een rechthoek. Voor hem is een cirkel geen ellips, vallen twee evenwijdige lijnen niet samen. En in een historisch primitief stadium is er geen getal 0 en geen lege verzameling. Bij de ontwikkeling van de wetenschap worden grensproblemen zichtbaar en worden dan beslissingen genomen.
Bij een bespreking van grensgevallen mag een analyse van het begrip oneindig niet ontbreken. Eerst in de tweede helft van de 19e eeuw is hier het primitieve stadium doorbroken. Cantor heeft als eerste het begrip oneindige verzameling grondig onderzocht. Zo kreeg men inzicht in de diverse soorten oneindige verzamelingen en in de kardinaalgetallen. Cantor en Dedekind legden de structuur van het continuum bloot. En in de verzamelingentheorie liet Cantor zien dat de machtigheid van het continuum een andere is dan die van de aftelbaar oneindige rijen, zoals de natuurlijke getallen.
Om het grensprobleem ten aanzien van oneindig duidelijk te kunnen stellen, leek het me dienstig eerst het primitieve stadium waarin dit begrip verkeerd heeft, onder de loep te nemen. Bolzano (1781-1848) heeft zich diepgaand beziggehouden met de problemen rond oneindig. Zijn gedachten zijn samengevat in een boek, *Paradoxien des Unendlichen*, dat postuum in 1851 verschenen is. Bolzano was een goed wiskundige. De stelling van Bolzano-Weierstrass (een begrensde oneindige verzameling heeft ten minste één verdichtingspunt) is door hem voor het eerst bewezen. Behalve dat was hij ook een bekend logicus. Deze combinatie maakte hem uitnemend geschikt om zich te verdiepen in problemen rond het oneindige. Hoe scherpzinnig zijn analyses ook zijn, toch hebben ze, zoals we zullen zien, een grote mate van primitiviteit. Daardoor juist zijn ze voor ons hier interessant.

2 Bolzano kent maar één soort oneindigheid

Bolzano onderscheidt veelheden en grootheden. Beide kunnen oneindig zijn. Bij *veelheden* kunnen we denken aan rijen gelijksoortige dingen, zoals natuurlijke getallen; bij *grootheden* aan een lijnstuk, een lijn, een vlak, de ruimte, maar ook aan de fysische tijd en ruimte.
Een veelheid ontstaat door dingen van een bepaalde soort achter elkaar te plaatsen. Elke volgende ontstaat uit de vorige volgens een bepaalde wet (Bildungsgesetz). De gelijksoortige dingen, dus de termen van de rij, noemt Bolzano eenheden. Heeft een veelheid geen laatste lid, dan is hij oneindig. Een oneindige veelheid is groter dan elk eindig deel. Oneindige veelheden hebben dus alle dezelfde structuur. De vraag is of er nog andere soorten oneindig zijn. Is 'Unendliches überhaupt' *hetzelfde* als oneindige veelheid?

So wäre es, falls es sich zeigen sollte, es gebe streng genommen nichts anderes, als eben nur Vielheiten, auf welche der Begriff des Unendlichen in seiner eigentlichen Bedeutung angewandt werde. ... Dat ist nun, däucht mir, wirklich.

Er is dus maar één soort oneindigheid en dat is, wat wij zouden noemen, aftelbare oneindigheid.
Maar hoe zit het dan met grootheden, zoals een rechte lijn? Als een wiskundige zich bezighoudt met grootheden, dan doet hij dit door middel van eenheid en aantal. Vindt hij een grootheid groter dan elk aantal aangenomen eenheden, dan noemt hij die oneindig groot.
Ik zou dit zo willen interpreteren. Neem een lijnstuk als eenheid. Pas dit steeds weer in een bepaalde richting naast het vorige af. Neemt dit proces geen einde, dan krijgen we een halve lijn. De hele lijn

ontstaat uit twee halve lijnen net zoals de gehele getallen ontstaan uit twee oneindige rijen. Aan een rechte lijn ligt dus dezelfde oneindigheidsstructuur ten grondslag als aan de oneindige veelheid.

Ik kan niet nalaten hier het betoog te onderbreken door mee te delen dat Bolzano in één adem met de oneindig grote grootheid ook de oneindig kleine noemt. Als een grootheid zo klein is dat hij, hoe vaak je hem ook neemt, kleiner blijft dan de eenheid, dan noemt hij hem oneindig klein. Het begrip oneindig kleine grootheid wordt dus gedefinieerd met behulp van het begrip oneindig grote veelheid. En zo ontstaat geen principieel nieuw soort oneindigheid. Kennelijk is zijn uiteenzetting geïnspireerd door de '*dx*' van Leibniz. Men zou kunnen zeggen, dat het oneindig kleine zich verhoudt tot de eenheid als de eenheid tot het oneindig grote.
Omdat het buiten het kader van dit artikel ligt, ga ik niet verder in op Bolzano's beschouwingen over oneindig klein.

3 De structuur van het continuum

Ik keer terug naar de oneindig grote grootheid. De rechte lijn bestaat volgens Bolzano uit oneindig veel eenheden (eenheidslijnstukken). Maar, zal men zeggen, hij bestaat toch ook uit oneindig veel punten. Zegt Bolzano daar dan niets over? Dat doet hij wel. Hij gaat daarbij van de rechte lijn over op fysische tijd en ruimte, maar dat is niet van belang. Hij zegt:

In der Zeit nun sowohl als auch im Raume ist die Menge der einfachen Teile oder Punkte, aus denen jene und dieser bestehen, unendlich.

Dit geldt voor de tijd als geheel. *Maar ook de verzameling van de tijdpunten (of ruimtepunten) die tussen twee nog zo dicht bij elkaar gelegen tijdpunten (ruimtepunten) liggen, is oneindig.*
Hier ging ik recht zitten. Hoe redt de schrijver zich hieruit, als hij alleen maar de aftelbaar oneindige rij erkent? Het antwoord was een deceptie voor me.

In eine Verteidigung dieser Sätze brauche ich mich um so weniger einzulassen, da es kaum irgend einen Mathematiker gibt, der ... sie uns nicht zugestände.

De aard van deze oneindigheid blijft dus in het duister verborgen.
Het probleem hangt nauw samen met de structuur van het continuum. Laten we eens zien wat Bolzano daarvan zegt. Een eigenschap van het continuum is dat elk punt ervan buren heeft die er minder dan een willekeurig kleine gegeven afstand vanaf liggen. Hij gaat echter nog een stap verder en zegt dat dit niet alleen een eigenschap van het continuum is, maar de noodzakelijke en voldoende voorwaarde dat iets een continuum is. Volgens onze opvattingen is dit radicaal mis. Immers volgens deze definitie zou de verzameling van de rationale punten al een continuum zijn.
Het begrip continuum baart hem wel zorgen. Kun je een continuum opbouwen uit punten? Bijvoorbeeld door ze als het ware op elkaar te stapelen. Dat kan niet. Twee 'naburige' punten kunnen elkaar niet raken, want er zijn nog altijd oneindig veel verschillende punten tussen. En omgekeerd, kunnen we de punten krijgen door een continuum steeds verder onder te verdelen? Ook dit lukt niet. We kunnen een lijnstuk halveren, de delen weer halveren enz. Zo krijgen we nooit punten. We krijgen wel oneindig veel lijnstukken, maar die bestaan elk weer uit oneindig veel punten. Een lijnstuk bestaat dus uit punten, maar kan niet door verdeling in punten worden opgelost. Dit geestelijke worstelproces besluit hij met de opmerking:

Und beides verträgt sich, nur recht verstanden, sehr wohl.

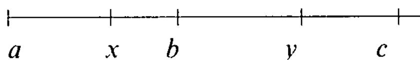
4 Rekenen met oneindig

a *Oneindige veelheden*
Ieder kent de hier volgende reacties van mensen die nog geen kennis genomen hebben van het begrippenapparaat van de verzamelingenleer dat dient voor het vergelijken van oneindige verzamelingen.
Zijn er evenveel natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, ... als even getallen 2, 4, 6, 8, ...?
Nee, er zijn 2 maal zoveel natuurlijke getallen.
Zijn er evenveel natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, ... als getallen boven 10, dus getallen in de rij 11, 12, 13, 14, ...?
Nee, in het laatste geval zijn er 10 minder.

Bereken $x = 0,\dot{3}5\dot{8}$.
$$1000x = 358{,}358358358\ldots$$
$$x = 0{,}358358358\ldots$$
$$\overline{999x = 358 \qquad\qquad x = \tfrac{358}{999}}$$

Reactie: dat klopt niet. Er zijn boven 3 decimalen minder dan beneden. Na het aftrekken blijft er dus nog iets over. Hoe reageert Bolzano op dergelijke vragen? Het voor ons instructieve is dat hij net zo reageert.
Bolzano tracht vast te stellen wanneer twee verzamelingen gelijk zijn. Zo we zien zullen kost dit hem veel moeite. Gelijkheid zal wel iets te maken hebben met het bestaan van een bijectie. Hij begint dan ook met de volgende stelling te bewijzen:
Het is mogelijk dat tussen twee verzamelingen een bijectie bestaat en dat desondanks de één een echt deel is van de ander (moderne formulering).
Hij toont dit aan door twee voorbeelden te geven.

1 De reële getallen tussen 0 en 5 en de reële getallen tussen 0 en 12. De eerste verzameling is een echt deel van de tweede. $12x = 5y$, waarin x element van de eerste en y van de tweede verzameling is, levert een bijectie.
2 De lijnstukken *ab* en *ac*.



ab is een echt deel van *ac*. Een bijectie wordt bewerkstelligd door $ax : ay = ab : ac$.
Tot zover niets bijzonders. Maar nu komt de conclusie. Uit het feit dat tussen twee verzamelingen A en B een bijectie bestaat, kan men, indien de verzamelingen oneindig groot zijn, niet concluderen dat ze

in Hinsicht auf die Vielheit ihrer Teile einander gleich seien.

Voor eindige verzamelingen geldt dit niet. Bestaat tussen twee eindige verzamelingen een bijectie, dan kunnen we het 1^e element aan het 1^e, het 2^e aan het 2^e, ..., het laatste aan het laatste koppelen. Is dit laatste element het n^e, dan bevatten beide verzamelingen n en dus evenveel elementen. Deze redenering gaat bij oneindige verzamelingen niet op, omdat deze geen laatste element hebben.
Nu terug naar de verzameling A van de reële getallen tussen 0 en 5 en B van die tussen 0 en 12. Er is weliswaar een bijectie tussen, maar de afstand van twee elementen van A is daarbij $\frac{5}{12}$ van de afstand van de corresponderende elementen van B.

Und hieraus folgt natürlich, dass je zwei dieser Grössen in B eine andere (grössere) Menge von solchen Grössen noch zwischen sich haben, als es in A der Fall ist; und somit ist es kein Wunder, dass auch die ganze Menge der Grössen in B eine andere (grössere) ist als in A.

Totnogtoe legt Bolzano uit dat twee verzamelingen niet even groot zijn. Wanneer zijn ze wel even groot (gleich)? Gelijkheid van verzamelingen is bij Bolzano een steeds weerkerend probleem en is juist het punt waarin hij voor ons het moeilijkst te volgen is. Vandaar dat ik er speciale zorg aan besteed zijn gedachten precies weer te geven. Hij zegt:

Nicht minder einleuchtend wird man es wohl auch finden, dass die ganze Menge (Vielheit) von Grössen, die zwischen zwei gegebenen, z.B. 7 und 8, liegen, ob si gleich eine unendliche ist, und somit durch keine noch so grosse Zahl bestimmt werden kann, doch lediglich nur von der Grösse des Abstandes jener zwei Grenzgrössen voneinander ... abhänge und somit eine gleiche sein müsse, so oft nur dieser Abstand gleich ist.

Hij noteert:
Mult. $(8 - 7) =$ Mult. $(13 - 12)$ en
Mult. $(b - a)$: Mult. $(d - c) = (b - a) : (d - c)$.
Meer spectaculair is de wijze waarop Bolzano rekent met oneindige getalverzamelingen en met oneindige sommen.
Hij stelt:
$$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + \ldots = \overset{0}{N} \qquad (1)$$
en
$$(n+1)^0 + (n+2)^0 + (n+3)^0 + (n+4)^0 + {}$$
$$+ \ldots = \overset{n}{N}.$$
Aftrekking geeft:
$$1^0 + 2^0 + \ldots + n^0 = \overset{0}{N} - \overset{n}{N}.$$

Twee verschillende oneindige grootten (Grössen) kunnen dus een eindig verschil hebben.
(Hij schrijft 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, ... om de verschillende 1'en in de reeksen te kunnen onderscheiden.)
Verder stelt hij:
$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = S.$$

Het is verleidelijk nu te denken dat

$$S = \frac{\overset{0}{N}(\overset{0}{N}+1)}{2}. \qquad (2)$$

Deze formule ontstaat door generalisatie van de formule voor de eindige som:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (3)$$

Bij het bewijs van (3) speelt de laatste term n van de reeks een rol. Een oneindige reeks heeft geen laatste term en daarom kan (2) niet door generalisatie uit (3) verkregen worden.
Nu iets anders. Uit (1) volgt:

$$1^0\overset{0}{N} + 2^0\overset{0}{N} + 3^0\overset{0}{N} + \ldots = (\overset{0}{N})^2,$$
$$1^0(\overset{0}{N})^2 + 2^0(\overset{0}{N})^2 + 3^0(\overset{0}{N})^2 + \ldots = (\overset{0}{N})^3 \text{ enz.}$$

Hieruit blijkt dat er oneindige grootten van hogere orde zijn, waarvan de een de ander oneindig maal overtreft.

Merkwaardig is ook de manier waarop hij vergelijkt
$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$
met
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots$.
Welke som is groter? De tweede reeks ontstaat uit de eerste door een heleboel termen weg te laten. Het schijnt dus dat de tweede reeks een kleinere som heeft. Dat is echter niet waar. De hoeveelheid termen (Gliedermenge) is in beide reeksen hetzelfde. Maar de termen van de tweede reeks zijn stuk voor stuk, op de eerste na, groter dan de termen van de tweede. En daarom heeft de tweede reeks een grotere som dan de eerste.
Het sommeren van oneindig voortlopende reeksen brengt nog andere problemen met zich mee.
In Gergonnes Annales de Mathématique van 1830 heeft Bolzano een artikel gevonden van een onbekende auteur waarin deze tracht
$a - a + a - a + a - a + \ldots$
uit te rekenen. Deze auteur gaat daarbij als volgt te werk.

$$a - a + a - a + \ldots =$$
$$= a - (a - a + a - a + \ldots) \qquad (4)$$

Stel nu $a - a + a - a + \ldots = x$. In (4) staat dan:
$x = a - x$,
waaruit volgt $x = \frac{1}{2}a$.
Fout, zeg Bolzano, want in (4) staat tussen de haakjes in het rechter lid een term minder dan in het linker lid. En dus mag men niet zeggen dat die vorm gelijk aan x is.
Het probleem laat Bolzano toch niet met rust. 'Kraft des Begriffes einer Summe' moet volgens hem de commutatieve en de associatieve eigenschap voor sommen gelden. Dus is:

$$a - a + a - a + \ldots = (a - a) + (a - a) + \ldots =$$
$$= 0 + 0 + \ldots = 0,$$

maar ook

$$a - a + a - a + \ldots = a + (-a + a) +$$
$$+ (-a + a) + \ldots = a + 0 + 0 + \ldots = a.$$

Zou $a - a + a - a + \ldots$ betekenis hebben, dan zou het gelijk zijn aan 0 en ook aan a. Dat kan niet en dus heeft $a - a + a - a + \ldots$ geen betekenis (is deze vorm 'gegenstandslos').
Toch is het heel goed mogelijk dat een oneindige reeks een eindige som heeft. Bolzano geeft als voorbeeld:
$\frac{14}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \ldots$,
Welke reeks als som $\sqrt{2}$ heeft.
Hij beperkt zich daarbij tot reeksen met positieve termen. Wij weten dat hij daarmee vele gevaren bezworen heeft.

Hij bewijst de formule

$$1 + e + e^2 + \ldots = \frac{1}{1-e} \quad (0 < e < 1).$$

Het bewijs is zo tekenend voor de opvattingen van Bolzano dat ik het in extenso zal weergeven.
Bewijs. Stel:

$$S = 1 + e + e^2 + \ldots \qquad (5)$$

Dan is ook

$$S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n + e^{n+1} + e^{n+2} + \ldots,$$

of

$$S = \frac{1-e^n}{1-e} + \overset{1}{P}, \qquad (6)$$

waarin

$$\overset{1}{P} = e^n + e^{n+1} + e^{n+2} + \ldots.$$

We kunnen ook schrijven:

$$e^n + e^{n+1} + e^{n+2} + \ldots = e^n(1 + e + e^2 + \ldots). \quad (7)$$

Het lijkt nu, alsof de vorm tussen de haakjes in het rechter lid van (7) gelijk is aan de vorm in het rechter lid van (5). Dit is niet juist, want de vorm in (7) bevat n termen minder dan de vorm in (5).
Stel nu de vorm tussen de haakjes in (7) gelijk aan

$S - \overset{2}{P}$. Dan is

$$S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n(S - \overset{2}{P})$$

$$S(1-e^n) = \frac{1-e^n}{1-e} - e^n\overset{2}{P}$$

$$S = \frac{1}{1-e} - \frac{e^n}{1-e^n}\overset{2}{P}. \qquad (8)$$

Uit (6) en (8) volgt:

$$\frac{-e^n}{1-e} + \overset{1}{P} = \frac{-e^n}{1-e^n}\overset{2}{P}$$

$$\overset{1}{P} + \frac{e^n}{1-e^n}\overset{2}{P} = \frac{e^n}{1-e}.$$

Neem nu n 'beliebig gross'. Dan wordt $\frac{e^n}{1-e}$ kleiner dan een nog zo klein getal. Dan moeten $\overset{1}{P}$ en $\frac{e^n}{1-e}\overset{2}{P}$, die immers beide positief zijn, 'unter jedem beliebigen Wert herabsinken'. Uit (8) zien we dan dat inderdaad

$$S = \frac{1}{1-e}.$$

Onduidelijk blijft wanneer twee oneindige reeksen nu gelijke 'Gliedermenge' hebben en wanneer niet. Laat je een beginstuk van een reeks weg, dan wordt de Gliedermenge kleiner. Maar

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ en

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots$

hebben wel dezelfde Gliedermenge. Voor het gelijk zijn van veelheden is, zoals we reeds zagen, het bestaan van een bijectie ertussen niet voldoende. Er moet nog aan een verdere eis voldaan worden. Deze luidt als volgt.

Auf eine Gleichheit dieser Vielheiten wird erst geschlossen werden dürfen, wenn irgendein anderer Grund noch dazukommt, wie etwa, dass beide Mengen ganz gleiche Bestimmungsgründe, z.B. eine ganz gleiche Entstehungsweise haben.

Het kost moeite met dit kriterium uit de voeten te komen. Ik wil het proberen.

$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + \ldots$

$(n+1)^0 + (n+2)^0 + (n+3)^0 + (n+4)^0 + \ldots$

hebben niet dezelfde ontstaanswijze, want de tweede reeks ontstaat uit de eerste door de eerste n termen weg te laten.

Daarentegen hebben

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ en

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots$

wel dezelfde ontstaanswijze. In beide gaan we van 1 naar 2, van 2 naar 3, van 3 naar 4, ... En dus hebben ze dezelfde Gliedermenge.

Ik heb nu nog één ondeugende vraag. Hoe zit het met de drie reeksen:

$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + \ldots$

$11^0 + 12^0 + 13^0 + 14^0 + \ldots$

$(1+10)^0 + (2+10)^0 + (3+10)^0 + (4+10)^0 + \ldots$?

De tweede ontstaat uit de eerste door de eerste 10 termen weg te laten en heeft dus een kleinere Gliedermenge. De derde ontstaat net zo als de eerste, namelijk door over te gaan van 1 naar 2, van 2 naar 3, van 3 naar 4, ..., en heeft dus gelijke Gliedermenge. Maar ik zie geen verschil tussen de tweede en de derde.

Kritiek is gemakkelijk. Maar hoe zoudt u op al deze problemen gereageerd hebben, als u geen voorscholing had ondergaan en uw hersens nog evenzeer tabula rasa waren als die van Bolzano?

Voor een leraar hebben deze beschouwingen nog een andere waarde. Hij ziet met welke moeilijkheden zijn leerlingen te kampen hebben als ze voor het eerst met problemen rond het oneindig zijn van verzamelingen te maken krijgen.

b *Oneindige grootheden*

Ook met betrekking tot grootheden moet Bolzano vaststellen wanneer ze gelijk zijn. Hij moet uitleggen wanneer twee lijnstukken gelijk zijn en meer algemeen wanneer Ausdehningen gelijk zijn. Dat kunnen bijv. ook vierkanten of kubussen zijn.

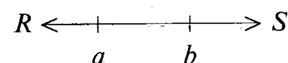
Jeder Geraden, ja jeder räumlichen Ausdehnung überhaupt, die einer anderen nicht nur ähnlich, sondern auch (geometrisch) gleich ist (d.h. in allen durch die Vergleichung mit einer gegebenen Entfernung begrifflich darstelbaren Merkmalen mit ihr übereinstimmt), muss auch die gleiche Menge von Punkten zugestanden werden.

Hij kiest een lijnstuk ab als lengte-eenheid. Dit is de verzameling waarmee hij alle andere verzamelingen vergelijkt. De verzameling punten van dit lijnstuk noemt hij E. Verleng ab met een even lang lijnstuk bc. De puntverzameling ac is dan $2E - 1$. We hebben namelijk 2 keer het lijnstuk ab genomen, maar het punt b is daarbij dubbel geteld. Neem het lijnstuk ab n keer en men krijgt een puntverzameling $nE - (n-1)$.

De verzameling punten van een vierkant met zijde 1 is E^2. De verzameling punten van een rechthoek met zijden m en n is
$mnE^2 - (n(m-1) + m(n-1))E + (m-1)(n-1)$.
De verzameling punten van een kubus met ribbe 1 is E^3. En de verzameling punten van een rechthoekig parallellopipedum met ribben m, n en r kan ieder nu zelf wel uitrekenen.
Het volgende probleem is de onbegrensde lijn. Bolzano wil verschillende rechte lijnen vergelijken. Hij zegt:

Wir müssen auch allen solchen Geraden die gleiche Länge und die gleiche Punktenmenge zugestehen; weil die bestimmenden Stücke, durch die sich für ein Paar solcher Geraden zwei Punkte bestimmen lassen, durch welche sie gehen, wenn wir den Abstand zwischen diesen Punkten gleich gross annehmen, einander nicht nur ähnlich, sondern auch (geometrisch) gleich sind.

Als ik het goed begrijp staat hier: neem op beide rechten een even groot-eenheidslijnstuk. Uit deze eenheidslijnstukken worden beide op dezelfde manier (door herhaald achter elkaar plaatsen) opgebouwd. Daarom zijn ze gelijk.
In overeenstemming hiermee zegt Bolzano dat de verzameling van de punten van een rechte lijn oneindig keer zo groot is als die van het eenheidslijnstuk, dus gelijk aan oneindig keer E.
Als men op deze manier redeneert, komt men stellig ook tot de overtuiging dat alle halve rechten aan elkaar gelijk zijn. Hier zorgt Bolzano echter voor een onverwachte verrassing. Verdeel een lijn door een punt a in twee halve rechten R en S.



Men zou dan kunnen denken dat $aR = aS$. Kies op de halve rechte nog een van a verschillend punt b. Wie denkt dat $aR = aS$, zal ook accepteren dat
$bR = bS$. Maar
$bR = ba + aR$ en $bS = aS - ab$.
Hieruit volgt, dat
$aR + ba = aS - ab$
en dus is het niet mogelijk dat $aR = aS$.
Bolzano concludeert hieruit dat een rechte lijn blijkbaar geen midden heeft.

5 Orde in de chaos

De behandeling van het oneindige door Bolzano doet op het eerste gezicht nogal chaotisch aan. Toch valt dat mee en ik zal proberen er wat orde in te brengen.
Bolzano zegt dat het niet mogelijk is het oneindige in een getal uit te drukken. Immers:

Wie will man das Unendliche durch Zahlen zu bestimmen versuchen – jedes Unendliche, das unserer eigenen Erklärung nach stets etwas Solches sein muss, das wir als eine aus unendlich vielen Teilen bestehende Menge, d.h. als eine Menge betrachten, die grösser als eine jede Zahl ist, die sonach unmöglich durch die Angabe einer blossen Zahl bestimmt werden kann?

Zo komt Bolzano ertoe niet met getallen maar met verzamelingen te rekenen. Hij moet dan beginnen met vast te stellen wanneer twee verzamelingen gelijk zijn. Hij beperkt zich daarbij steeds tot verzamelingen van dezelfde soort. Zo legt hij uit wanneer twee intervallen gelijk zijn, wanneer de Gliedermengen van twee reeksen gelijk zijn, wanneer lijnstukken en meer algemeen ruimtelijke uitgestrektheden (bijv. vierkanten, kubussen) gelijk zijn. En ten slotte dat alle rechte lijnen gelijk zijn, maar halve lijnen niet. De Gliedermengen en de halve lijnen doen wat vreemd aan, maar verder zijn de resultaten wel plausibel.
Daarna komt de optelling aan de beurt. We tellen alleen maar gelijksoortige verzamelingen bij elkaar op. Dit doen we door de verzamelingen *samen te voegen*. Hoe dit in zijn werk gaat, zien we het duidelijkst bij de lijnstukken. Het eenheidslijnstuk noemt hij E. Neem nu een eenheidslijnstuk ab en maak daaraan vast een lijnstuk $bc = ab$. In totaal krijgen we dan een verzameling 2E (= E + E). Het punt b komt daarin twee keer voor. De *vereniging* van ab en bc, dus het lijnstuk ac, is dus 2E − 1.
We zien hieruit terloops nog twee dingen:
- Als hij met eindige verzamelingen rekent, stelt hij deze wel door een getal voor. Een verzameling met 10 elementen wordt voorgesteld door het getal 10, een singleton, zoals hierboven, door het getal 1.
- Hij kent ook een aftrekken van verzamelingen. De aftrekking is de inverse bewerking van de optelling. Het verschil $A - B$ van de verzamelingen A en B krijgt men door B uit A weg te nemen. Dit verschil

bestaat alleen als B een deel is van A.
Nu kan men van een verzameling A ook alle elementen wegnemen. Men houdt dan niets over. In zo'n geval schrijft men:
$A - A = 0$.
Hierin stelt 0 geen grootheid voor, maar wijst alleen op de afwezigheid van een grootheid. Evenzo moet men
$A + 0 = A$
lezen: als men aan de verzameling A niets toevoegt, houdt men A. Bolzano kent dus geen lege verzamelingen.
Tot slot de vermenigvuldiging. Onder nA (n is een natuurlijk getal) wordt de som verstaan van n verzamelingen A. Vermenigvuldiging van een verzameling met een natuurlijk getal is dus een herhaalde optelling.
Er komen echter nog enkele andere produkten voor. De verzameling van de punten van een lijn is oneindig keer zo groot als de verzameling punten van het eenheidslijnstuk, dus gelijk aan oneindig keer E. Het is de som van een reeks met oneindig veel termen die alle gelijk aan E zijn.
Een dergelijke vermenigvuldiging zijn we nog eens tegengekomen, namelijk in

$$(\overset{0}{\mathrm{N}})^2 = 1^0\overset{0}{\mathrm{N}} + 2^0\overset{0}{\mathrm{N}} + 3^0\overset{0}{\mathrm{N}} + 4^0\overset{0}{\mathrm{N}} + \ldots.$$

Hier is $\overset{0}{\mathrm{N}} \cdot \overset{0}{\mathrm{N}}$ gelijk aan de som van oneindig veel termen die alle gelijk aan $\overset{0}{\mathrm{N}}$ zijn.

Ten slotte zijn we nog tegengekomen, dat de puntverzameling van een vierkant gelijk is aan E^2. Bolzano is er niet in geslaagd de punten van een lijnstuk in een oneindige rij te ordenen. Vandaar dat deze vermenigvuldiging niet teruggebracht kan worden tot de voorgaande. Kennelijk heeft deze vermenigvuldiging te maken met de vorming van het cartesisch produkt van twee verzamelingen E. Als men het zo beziet, is het helemaal zo gek nog niet. Er zitten enkele zwakke punten in. Het gesol met gelijke en ongelijke Gliedermengen is niet verantwoord. Dit spruit voort uit de gebrekkige definitie van gelijkheid van Gliedermengen. Onbegrijpelijk is, dat alle rechten gelijk zijn, maar de halve rechten niet. En natuurlijk was een handicap voor Bolzano dat hij nog niet wist dat er geen bijectie bestaat tusen de verzameling van de natuurlijke getallen en die van de punten van een continuum. Dat kunnen we hem niet kwalijk nemen; dat was toen nog niet bekend. Het is pas door Cantor aangetoond.

6 Het grensprobleem

Bolzano drukt de omvang van een eindige verzameling in een getal uit. Bij een oneindige verzameling acht hij dit niet meer mogelijk. Desondanks blijft hij rekenen met verzamelingen die zowel eindig als oneindig mogen zijn. Een onbevredigende toestand. Vroeger hebben we de natuurlijke getallen uitgebreid met het getal 0, dat het aantal elementen van een lege verzameling aangaf. Het ligt voor de hand te trachten deze natuurlijke getallen nogmaals uit te breiden en nu met een getal oneindig. Of misschien wel met een heleboel getallen oneindig.
We proberen het. Aan elke verzameling voegen we een getal toe dat de omvang, het aantal elementen, van de verzameling aangeeft. Dit getal noemen we het *kardinaalgetal* van de verzameling. Totnogtoe klinkt het vaag; wat is de definitie van een kardinaalgetal? Geduld, die komt. Maar eerst gaan we met kardinaalgetallen rekenen.
Kernvraag is: wanneer hebben twee verzamelingen hetzelfde kardinaalgetal? Anders geformuleerd: wanneer hebben twee verzamelingen evenveel elementen? We moeten hierover een afspraak maken. Duidelijk is, dat voor gelijkheid noodzakelijk zal zijn dat er een bijectie tussen de twee verzamelingen mogelijk is. Bolzano was hiermee niet tevreden. Er moest nog aan een of andere nevenvoorwaarde voldaan worden. Het bleek ondoenlijk, althans voor hem, een dergelijke nevenvoorwaarde scherp te formuleren. En de formuleringen die hij opstelde, leidden soms tot nare consequenties. Daarom hakken we de knoop door en definiëren:
Twee verzamelingen hebben *hetzelfde kardinaalgetal* (evenveel elementen) als er een bijectie tussen bestaat.
Nu zijn er dus evenveel even getallen als natuurlijke getallen en even veel getallen 'boven de 10' als natuurlijke getallen. Het blijkt mogelijk dat een verzameling evenveel elementen heeft als een echt deel. Dit is zelfs een kenmerk van oneindige verzamelingen. We kunnen namelijk definiëren naar believen:
Een verzameling is *oneindig* als voor elke natuur-

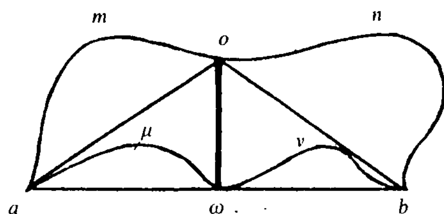
lijke n geldt dat hij een deelverzameling heeft met n elementen, maar ook:
Een verzameling is *oneindig* als er een bijectie bestaat tussen die verzameling en een echte deelverzameling.
De vraag rijst of alle oneindige verzamelingen evenveel elementen, dus hetzelfde kardinaalgetal hebben. Alle verzamelingen die zich laten rangschikken in een oneindige rij uiteraard wel. Voeg maar het n^e getal van de ene rij toe aan het n^e getal van de andere rij en we hebben een bijectie. Het kardinaalgetal van deze verzameling noemen we *aftelbaar oneindig*. Notatie: a.
Als we Bolzano geloven, hebben alle oneindige verzamelingen het kardinaalgetal a. Maar hij weet ons niet te overtuigen. De verzameling punten van een lijnstuk is weliswaar oneindig, maar hij weet ze niet in een rij te rangschikken. Cantor heeft aangetoond dat er geen bijectie mogelijk is tussen de reële getallen in het interval $[0, 1]$ en de natuurlijke getallen. En meer algemeen dat er niet evenveel reële als natuurlijke getallen zijn. Dit leidt tot de definitie:
We zeggen dat het kardinaalgetal van V *groter is dan* dat van W als er een bijectie mogelijk is tussen W en een echt deel van V, maar geen bijectie tussen W en V.
Noem het kardinaalgetal van de reële getallen c. Dan is dus c > a.
We kunnen dus niet met één getal oneindig volstaan. Wie op de hoogte is van de theorie van Cantor, weet dat nu het hek van de dam is. Ik ga hier niet nader op in. Het is alleen maar mijn bedoeling het grensprobleem te analyseren.
We moeten nog met de kardinaalgetallen kunnen rekenen.
Neem twee kardinaalgetallen $k_1 en\, k_2$. Onderstel k_1 is kardinaalgetal van een verzameling V_1 en k_2 van V_2. Neem verder aan dat $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Dan is per definitie:
$k_1 + k_2$ het kardinaalgetal van $V_1 \cup V_2$.
Nu de vermenigvuldiging. Neem weer twee kardinaalgetallen k_1 en k_2 en laten V_1 en V_2 verzamelingen zijn met kardinaalgetal resp. k_1 en k_2. Dan is per definitie:
$k_1 \cdot k_2$ het kardinaalgetal van $V_1 \times V_2$.
Wat is het verband tussen ordening, optelling en vermenigvuldiging van kardinaalgetallen en van natuurlijke getallen? Er is een bijectie tussen de verzameling van de kardinaalgetallen van eindige verzamelingen en de natuurlijke getallen. Noem het kardinaalgetal van een verzameling met n elementen n_k. Dan is
n_k het kardinaalgetal van $\{1, 2, \ldots, n\}$
0_k het kardinaalgetal van $\varnothing$.
Voeg n_k toe aan n en 0_k aan 0. Daarmee is een bijectie vastgelegd.
We zien nu, dat
$n_k > m_k \Leftrightarrow n > m$
$n_k + m_k = r_k \Leftrightarrow n + m = r$
$n_k \cdot m_k = r_k \Leftrightarrow n \cdot m = r.$
Het rekenen met kardinaalgetallen van eindige verzamelingen geschiedt dus net zo als het rekenen met natuurlijke getallen. We kunnen het iets mooier zeggen. Noem de verzameling van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ en die van de kardinaalgetallen van eindige verzamelingen $\mathbb{N}_k$. Dan is
$(\mathbb{N}_k, >, +, \cdot)$ isomorf met $(\mathbb{N}, >, +, \cdot)$.
Het rekenen met kardinaalgetallen is dus een generalisatie van het rekenen met natuurlijke getallen.
Bij het rekenen met verzamelingen speelde bij Bolzano ook de aftrekking een rol. Neem een aftelbaar oneindige verzameling V en ontneem daaraan de elementen van een deelverzameling W. Dan houdt Bolzano $V - W$ over. Het aantal elementen van $V - W$ kan echter elk natuurlijk kardinaalgetal en ook aftelbaar oneindig zijn. We zien hieruit dat de vergelijking $a + x = a$ als oplossingen heeft elk kardinaalgetal van een eindige verzameling en a zelf. Daarom definiëren we geen aftrekking van kardinaalgetallen.
Slotvraag: wat is een kardinaalgetal? De relatie 'heeft hetzelfde kardinaalgetal als' tussen verzamelingen is een equivalentierelatie. Deze relatie verdeelt de verzamelingen in equivalentieklassen. Deze equivalentieklassen heten kardinaalgetallen.

In de rubriek recreatie vindt u nog een opgave die ontleend is aan het boek van Bolzano.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

554 Bolzano geeft in zijn *Paradoxien des Unendlichen* (1851) het volgende bewijs van de stelling:
Een lijnstuk is de kortste samenhangende verbinding van twee punten.



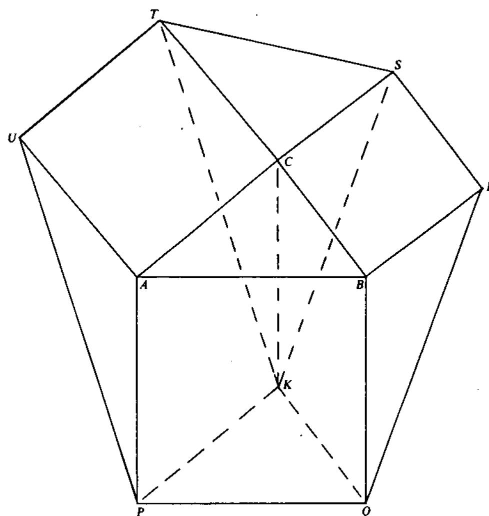
Bewijs. Onderstel dat *amonb* niet het lijnstuk *ab* is en wel de kortste samenhangende verbinding van *a* en *b* is. Dan ligt er op *amonb* een punt *o* dat niet op *ab* ligt. Laat de loodlijn *oω* op *ab* neer. Dan is
$a\omega < ao$ en $b\omega < bo$.
Verbind nu *a* en *ω* door een lijn *aμω* die gelijkvormig is met *amo* en *ω* en *b* door een lijn *ωνb* die gelijkvormig is met *onb*.
Uit $a\omega < ao$ volgt nu, vanwege de gelijkvormigheid, dat ook $a\mu\omega < amo$. Evenzo volgt uit $b\omega < bo$, dat $\omega\nu b < onb$. Dus is $a\mu\omega\nu b < amonb$. Hieruit zou volgen dat *amonb* niet de kortste samenhangende verbinding van *a* en *b* is. Contradictie.
Er is dus geen kortere samenhangende verbinding van *a* en *b* dan het lijnstuk *ab*.
Het lezen van dit bewijs is op zichzelf al mathematische recreatie. Toch wil ik een vraag stellen. Is er iets fout?

555 Een getal van acht cijfers is een kwadraat. Het getal gevormd door de eerste vier cijfers is een kwadraat en het getal gevormd door de laatste vier cijfers eveneens. Het getal begint niet met een 0 en eindigt niet op vier 0'en.
Welke getallen voldoen hieraan? (dr. R. S. Tjaden Modderman)

556 Gegeven zijn *n* punten in het platte vlak die niet op één rechte lijn liggen. Is het mogelijk ze te verbinden door een gesloten gebroken lijn waarvan geen twee niet-opeenvolgende lijnstukken een punt gemeen hebben? Elk lijnstuk heeft als uiteinden twee van de *n* punten.

Oplossingen

551 *ABQP*, *BCSR* en *CAUT* zijn vierkanten. Gegeven zijn *PQ*, *RS* en *TU*. Construeer $\triangle ABC$.



Kies *K* zo, dat $\triangle PQK \cong \triangle ABC$. Dan zijn *PKTU* en *QKSR* parallellogrammen en is dus $KT = PU$ en $KS = QR$. Verder is *PKCA* een parallellogram en dus $KC = AP$ en $KC \perp AB$.
Noem de lengten van de zijden van $\triangle ABC$ op de gebruikelijke manier *a*, *b* en *c* en de grootten van de hoeken α, β en γ. Nu is $CS = a$, $CT = b$, $CK = c$, $\angle KCT = 180° - \alpha$, $\angle KCS = 180° - \beta$ en $\angle SCT = 180° - \gamma$
Dan is
opp. $\triangle KCT = \frac{1}{2}bc\sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$
opp. $\triangle KCS = \frac{1}{2}ac\sin(180° - \beta) = \frac{1}{2}ac\sin\beta$
opp. $\triangle SCT = \frac{1}{2}ab\sin(180° - \gamma) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$
en dus
opp. $\triangle KCT =$ opp. $\triangle KCS =$ opp. $\triangle SCT$
Daaruit volgt dat *C* het zwaartepunt is van $\triangle KST$.
Construeer dus $\triangle KST$, teken het zwaartepunt en maak de figuur af.

552 In een restaurant heb ik 13 suikerzakjes gekregen met ouderwetse auto's erop afgebeeld. Er bleken 10 verschillende onder te zijn. Wat is het meest waarschijnlijke aantal verschillende dat er in werkelijkheid is?
Onderstel dat er in werkelijkheid *a* verschillende suikerzakjes zijn. De kans op 10 verschillende onder 13 zakjes is dan

$$p_a \frac{\binom{13}{3} a(a-1)(a-2)\ldots(a-9)\,10^3}{a^{13}}$$

Volgens het theorema van Bayes is dan de kans dat er in werkelijkheid a verschillende zijn

$$\frac{p_a}{p_{10} + p_{11} + p_{12} + \dots}$$

Deze kans is maximaal als

$$f(a) = \frac{(a-1)(a-2)\dots(a-9)}{a^{12}}$$

maximaal is.

Nu is

$$\frac{f(11)}{f(10)} = \frac{10}{1}\left(\frac{10}{11}\right)^{12}$$

Dit is groter dan 1 en dus is $f(11) > f(10)$.

Algemeen is

$$g(q) = \frac{f(10+q)}{f(9+q)} = \frac{9+q}{q}\left(\frac{9+q}{10+q}\right)^{12} = \frac{(9+q)^{13}}{q(10+q)^{12}}$$

Nu blijkt

$g(1) > g(2) > \dots > g(12) > 1$ en $g(13) < 1$

En dus

$f(10) < f(11) < f(12) < \dots < f(22) > f(23)$

Hieruit blijkt dat de kans op 22 verschillende in werkelijkheid het grootst is.

Om dit beter te funderen, moet men de functie g (met domein $\mathbb{R}$) nader onderzoeken. Deze blijkt dalend te zijn voor $q < 30$, stijgend voor $q > 30$ en tot 1 te naderen als $q \to \infty$. Inderdaad is $f(22)$ dus de grootste waarde van f.

Men vindt:

$g(10) = 1{,}022$, $g(11) = 1{,}012$, $g(12) = 1{,}001$, $g(13) = 0{,}993$, $g(14) = 0{,}985$, $g(15) = 0{,}981$

Hieruit zien we dat de kansen $f(19), f(20), f(21), f(22), f(23), f(24), f(25)$ elkaar maar weinig ontlopen.

Nu de werkelijkheid. De suikerzakjes werden afgeleverd in pakken van 1000. Elk pak bevatte 20 verschillende soorten en van elke soort 50 stuks.

553

a Vind alle natuurlijke getallen y, x, z waarvoor geldt dat y^2, x^2, z^2 in deze volgorde een rekenkundige rij vormen.

$y^2 + z^2 = 2x^2$ is gelijkwaardig met

$$\left(\frac{y+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-z}{2}\right)^2 = x^2$$

De algemene oplossing hiervan is (met x, y, z relatief priem)

$$\frac{y+z}{2} = r^2 - s^2, \frac{y-z}{2} = 2rs, x = r^2 + s^2 \ (r,s \in \mathbb{N}, r > s)$$

dus

$$y = r^2 + 2rs - s^2, z = r^2 - 2rs - s^2, x = r^2 + s^2 \qquad (1)$$

b Gevraagd wordt rationale oplossingen te vinden van

$$x^2 + x + 2 = y^2 \qquad (2)$$
$$x^2 - x - 2 = z^2$$

Gevonden is al dat $x = -\frac{17}{16}$, $y = \frac{23}{16}$, $z = \frac{7}{16}$ voldoet. Gevraagd wordt een andere oplossing te vinden, met positieve x.

Oplossingen vindt men door x, y en z uit (1) met een rationale ρ te vermenigvuldigen en er dan voor te zorgen dat aan (2) voldaan is. De bovengenoemde oplossing is kennelijk gevonden door $r = 4$, $s = 1$ te kiezen en daarna ρ te berekenen door substitutie in (2). We gaan dit ook doen. We krijgen

$$17\rho^2 + 17\rho + 2 = 23^2\rho^2$$
$$240\rho^2 - 17\rho - 2 = 0$$

De negatieve coëfficiënt -2 garandeert al dat, als deze vergelijking een negatieve wortel heeft, hij ook een positieve wortel zal hebben. Oplossen geeft

$$\rho = \frac{17 \pm \sqrt{2209}}{480}$$

Het geluk wil dat 2209 een kwadraat is. We vinden

$\rho = -\frac{1}{16} \vee \rho = \frac{2}{15}$.

Naast de reeds gevonden oplossing voldoet dus ook

$x = \frac{34}{15}$, $y = \frac{46}{15}$, $z = \frac{14}{15}$

Mededelingen

Brief aan de Staatssecretaris van O&W

Excellentie,

Op 8 december 1984 deelde U op het symposium 'Wiskunde voor allen. Verplicht?' te Hilversum mede dat U van mening was dat naast wijziging van het bovenbouwprogramma ook het programma voor rekenen en wiskunde op de basisschool en in de onderbouw van het voortgezet onderwijs moet worden aangepast.

In juni 1985 hebben de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een rapport uitgebracht over de longitudinale planning van het reken/wiskunde-onderwijs in Nederland. Op 20 augustus 1985 hebben bestuursleden van beide verenigingen in aanwezigheid van de heer Van Leijenhorst, inspecteur Westerhof en Uw ambtenaren Riel en Van Beusekom dit rapport met U besproken.

De indruk die wij van dit overleg hadden meegenomen was dat U positief stond tegenover de uitgangspunten en aanbevelingen van dit rapport. Het feit dat op instigatie van de heer Riel een preconstituerende vergadering van de zogenoemde Commissie Van der Blij op 25 november 1985 plaatsvond, bevestigde deze indruk.

In het advies van de Afdeling Secundair Onderwijs van de Onderwijsraad (O.R. 2A/897 d.d. 18 juli 1986) wordt opgemerkt dat aan de invoering van een nieuw eindexamenprogramma wiskunde havo consequenties zijn verbonden voor zowel de inrichting van het wiskunde-onderwijs van de mavo als voor die van de onderbouw van het havo en het vwo.

De besturen van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren hadden de hoop dat de Commissie Van der Blij begin 1986 geïnstalleerd zou worden en effectief aan het werk zou kunnen gaan.

Het uitstel tot nu toe van de instelling van genoemde commissie is voor onze beide verenigingen niet alleen een teleurstelling, maar vervult ons vooral met grote zorg.

Wij willen nogmaals de volgende knelpunten onder Uw aandacht brengen:

- De nieuwe examenprogramma's bovenbouw vwo (Hewet) vereisen aanpassing van alle voorafgaande programma's.

- In het bijzonder is het van groot belang dat de experimenten eindexamenprogramma wiskunde havo zonder verder uitstel worden aangevangen. Het positieve rapport van de Onderwijsraad ondersteunt deze gedachte.
- De eindexamen resultaten havo zijn de afgelopen jaren weinig florissant (in 1986 52% onvoldoende).
- De huidige mavo- en lbo-programma's zijn van een sterk formalistisch karakter en bieden geen mogelijkheden de wiskunde in toepassingssituaties te gebruiken. Bovendien dreigt er bij invoering van een nieuw havo-programma een discrepantie te ontstaan tussen dat programma en de mavo- en lbo-programma's. Het WRR-rapport benadrukt eveneens dat het wiskunde-onderwijs voor het lbo/mavo een meer toepassingsgericht karakter moet krijgen.
- De aansluitingsproblematiek van het basisonderwijs naar het voortgezet onderwijs wordt bemoeilijkt door het ontbreken van eindtermen voor het basisonderwijs.
  De NVORWO werkt thans aan een nationaal plan voor het reken/wiskunde-onderwijs. Daarmee wordt een kwaliteitsverbetering voor het rekenonderwijs beoogd. Tevens zal in dit plan een aanzet tot een formulering van eindtermen worden gemaakt.
- Nieuwe reken/wiskundemethoden in de geest van dit nationale plan worden steeds meer aangeschaft. De leraren van het basisonderwijs zijn echter lang niet altijd in staat er op adequate wijze mee om te gaan. Nascholing is ook hier van belang.
- De opleiding voor leraar basisonderwijs wordt hoe langer hoe meer uitgehold, vooral voor het vak rekenen/wiskunde. De eerste gegevens van een diepgaande enquête bevestigen dit.

Wij verzoeken U derhalve met klem de Commissie Van de Blij zo spoedig mogelijk te installeren en de gelegenheid te bieden op praktische wijze aan de slag te gaan.
Wij hopen spoedig een positieve reactie van U op ons verzoek te ontvangen.

Namens het bestuur van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs,
E. de Moor, secretaris

Namens het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren,
J. Maassen, secretaris

Nomenclatuurcommissie

In 1973 verscheen het 'Rapport van de Nomenclatuurcommissie', met adviezen over de te gebruiken termen en notaties bij de leerplannen van 1968. Nu er voor de bovenbouw vwo een eindexamenprogramma wiskunde A en B ligt, dat naar verwachting binnenkort definitief wordt, is een bezinning op de nomenclatuur gewenst.
In het voorjaar 1986 heeft het bestuur van de NVvW een nieuwe nomenclatuurcommissie benoemd, die tot eerste taak heeft op zo kort mogelijke termijn duidelijkheid te verschaffen over de nomenclatuur bij wiskunde A en de ruimtemeetkunde van wiskunde B.
Het bestuur is zich er wel van bewust dat nomenclatuurafspraken voor wiskunde A van invloed kunnen zijn op de nomenclatuur passend bij het onderbouwprogramma en heeft de commissie carte blanche gegeven ook deze problematiek, zij het misschien in tweede instantie, in haar adviezen te betrekken.
Aan de nomenclatuurcommissie is gevraagd om, geheel in de traditie van de werkwijze van voorgaande nomenclatuurcommissies, tussentijds verslag van haar bevindingen te doen in Euclides.

De samenstelling van de nieuwe nomenclatuurcommissie is: L. A. M. v.d. Broek (Nijmegen); A. Kelfkens (Echten); M. Kindt (Bennekom); Th. J. Korthagen (Warnsveld), voorzitter; W. van der Maaten (Epe); A. A. van 't Riet (Roden); A. van Streun (De Wilp), secretaris.

Examen wiskunde L.O.

De staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen brengt ter kennis van belanghebbenden, dat zij, die in het examenjaar 1987 willen deelnemen aan het examen ter verkrijging van de akte wiskunde l.o. zich tussen *15 januari en 15 februari 19787* dienen aan te melden – *uitsluitend per briefkaart* – bij de voorzitter van de examencommissie, de heer D. W. Oort, Beukenweg 9, 1521 EN Wormerveer.

Op de briefkaart moeten de naam van de kandidaat, alsmede zijn of haar volledig adres (dus met postcode) worden vermeld.

Het schriftelijk gedeelte van het examen zal plaatsvinden op 22 en 23 april 1987 en het mondeling gedeelte op 6, 13 of 17 juli 1987.

Met nadruk wordt er op gewezen dat aanmeldingen die na 15 februari 1987 binnenkomen *niet* meer in behandeling kunnen worden genomen.

Wiskunde en Onderwijs

De contributie die de Nederlandse leraren die lid van de NVvW zijn, aan de VVWL betalen, is onveranderd 450 BF gebleven. Zij ontvangen hiervoor het tijdschrift Wiskunde en Onderwijs en het Mededelingenblad van de VVWL en kunnen deelnemen aan de activiteiten van onze zustervereniging.
Gewijzigde posttarieven hebben echter een kink in de financiële kabel gegooid. Tot voor kort waren de drukwerktarieven van België naar Nederland belangrijk lager dan die van Nederland naar België. De Belgische regering heeft hieraan een eind gemaakt; ook zij kampt met het financieringstekort. Vandaar dat we een toeslag zullen moeten betalen van 100 BF voor verhoogde portokosten. We betalen dus voortaan 550 BF, of omgerekend in onze valuta, *f*30,75.
Zoudt u dit bedrag zo spoedig mogelijk willen voldoen door storting op giro 9334434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth?
Opzegging van het lidmaatschap kan geschieden voor 1 februari 1987 aan P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Nieuwe leden (abonnees op Wiskunde en Onderwijs) kunnen zich aanmelden door storting van *f*30,75, met bijschrift 'nieuw abonnee'.

P. G. J. Vredenduin

VULON-congres 1987

Het jaarlijks congres van de VULON (Vereniging Universitaire Lerarenopleiding Nederland) vindt in 1987 plaats op 19 en 20 februari te Beekbergen.
Congresthema: *Leren in praktijk* – Naar een opleidingsdidactiek met de onderwijspraktijk als toetssteen.

Het congres wordt georganiseerd voor alle betrokkenen bij de opleiding van leraren (lerarenopleiders, bedrijfsopleiders, schoolleiders, leraren, medewerkers uit de verzorgings- en beleidsstructuur). De congresbrochure en paperoproep zijn op aanvraag verkrijgbaar bij:
Secretariaat Congrescommissie VULON p/a UNILO Erasmusplein 1 (k.15.18), 6525 HT Nijmegen. Tel. 080-51 55 72.

De 25e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1986

H. N. Schuring

De Eerste Ronde

Op vrijdag 7 maart 1986 is de eerste ronde gespeeld. Aan alle scholen voor havo en vwo is verzocht leerlingen van niet-eindexamenklassen in de gelegenheid te stellen hieraan mee te doen. Gedurende drie uur konden de deelnemers proberen 13 opgaven op te lossen. Alleen goede antwoorden telden mee. Het maximaal te behalen puntenaantal was 36.
De wedstrijdleiders van 212 scholen hebben het uitslagenformulier tijdig opgestuurd, zodat het resultaat van 1914 deelnemers in onderstaand overzicht verwerkt kon worden.

score	frequentie	cumulatieve frequentie
36	5	5
35	0	5
34	5	10
33	11	21
32	8	29
31	29	58
30	8	66
29	24	90
28	8	98
27	33	131
26	18	149
25	32	181
24	14	195
23	36	231
22	46	277
21	39	316
20	54	370
19	33	403

score	frequentie	cumulatieve frequentie
18	53	456
17	43	499
16	61	560
15	54	614
14	66	680
13	55	735
12	86	821
11	81	902
10	83	985
9	95	1080
8	87	1167
7	115	1282
6	82	1364
5	114	1478
4	104	1582
3	63	1645
2	165	1810
1	8	1818
0	96	1914

De cesuur is gelegd bij score 28, wat zeggen wil dat de deelnemers van niet-eindexamenklassen die 28 of meer punten behaalden, worden uitgenodigd voor de tweede ronde. Van de 98 deelnemers waren er 71 leerling van 5 vwo, 17 leerling van 4 vwo, 2 leerling van 4 havo en 1 leerling van 3 vwo, terwijl 7 leerlingen buiten mededinging deelnamen.
De wisselprijs voor de school met het hoogste puntentotaal van de beste vijf deelnemers van die school is, evenals vorig jaar, gewonnen door C.S.G. Blaise Pascal te Spijkenisse; de vijf deelnemers behaalden samen 141 punten. Deze prijs is op vrijdag 13 juni 1986 door Shell uitgereikt in bovengenoemde school.
1 deelnemer aan de Pythagoras Olympiade kwam op grond van zijn prestaties in aanmerking voor de tweede ronde, zodat 92 leerlingen uitgenodigd zijn voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

De Tweede Ronde

Op 12 september 1986 is in Eindhoven de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1986 gehouden. Van de 92 uitgenodigde leerlingen hebben er 90 deelgenomen. Zij hadden drie uur de tijd om vier opgaven op te lossen. De maximale score per opgave was 10 punten.
Door bij gelijke eindscore rekening te houden met het behaalde puntenaantal in de eerste ronde, zijn de volgende elf deelnemers prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1986:

	tweede ronde	eerste ronde
1. Roel Janssen, Dedemsvaart	37 punten	30 punten
2. Joris v.d. Hoeven, Amsterdam	36 punten	34 punten
3. Henk Angerman, Winschoten	30 punten	33 punten
4. Mark v. Hoey, Someren-Heide	29 punten	28 punten
5. Reyer Gerlagh, Driebergen	27 punten	34 punten
6. Gerard Egelmeers, Veldhoven	27 punten	31 punten
7. Hoang Nguyen, Zwolle	26 punten	30 punten
8. Marc de Jong, Schalkhaar	25 punten	36 punten
8. Hugo Laurman, Spijkenisse	25 punten	36 punten
10. Chris Dekker, Vaassen	24 punten	31 punten
10. Bas v.d. Heuvel, Dordrecht	24 punten	31 punten

Opgaven

1 Men definieert een functie f door:

$$f(x) = \frac{12x + 9}{19x + 86}\left(x \neq -\frac{86}{19}\right).$$

Laat zien dat er één reëel getal x_0 bestaat, zo dat de uitdrukking $f(x_0 + h) \cdot f(x_0 - h)$ niet afhankelijk is van de keuze van h en bereken dat getal x_0.

2 Bewijs dat voor alle positieve gehele getallen n geldt dat

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

3 Bewijs dat $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqq 10$ als $a,b,c,d > 0$ en $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$.

4 Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen a en b en een punt A op a. Men kiest een cirkel γ door A die de lijn b raakt.
Het raakpunt noemt men B en het tweede snijpunt van γ en a noemt men T. De raaklijn in T aan γ heet t.
a Bewijs dat er, onafhankelijk van de keuze van γ, een vast punt P bestaat, zo dat BT door P gaat.
b Bewijs dat er, onafhankelijk van de keuze van γ, een vaste cirkel δ bestaat, zo dat t raaklijn is van δ.

Oplossingen

1 $f(x_0 + h) \cdot f(x_0 - h) =$

$$= \frac{(12(x_0 + h) + 9)(12(x_0 - h) + 9)}{(19(x_0 + h) + 86)(19(x_0 - h) + 86)} =$$

$$= \frac{(12x_0 + 9)^2 - (12h)^2}{(19x_0 + 86)^2 - (19h)^2}.$$

Deze uitdrukking is onafhankelijk van h als

$12x_0 + 9 = -\frac{12}{19} \cdot (19x_0 + 86)$, d.w.z. als

$$x_0 = -\frac{9 \cdot 19 + 12 \cdot 86}{2 \cdot 12 \cdot 19} = -\frac{401}{152}.$$

2 $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}\right) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{j} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

3 We gebruiken: $(x - y)^2 \geqq 0$ dus $x^2 + y^2 \geqq 2xy$ voor alle x, y. In het bijzonder $(x > 0, y = 1)$:

$x^2 + 1 \geqq 2x$, dus $x + \frac{1}{x} > 2$.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (ab + cd) + (ac + bd) + (ad + bc) =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \left(ab + \frac{1}{ab}\right) + \left(ac + \frac{1}{ac}\right) + \left(ad + \frac{1}{ad}\right) \geqq$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 6 \geqq$$

$$2ab + 2cd + 6 = 2\left(ab + \frac{1}{ab}\right) + 6 \geqq 10.$$

(Je kunt eenvoudig bewijzen dat de uitdrukking slechts *gelijk* aan 10 kan zijn als $a = b = c = d = 1$.)

4a Laat M het middelpunt van γ zijn en C het snijpunt van MB en a. De loodrechte projectie van A op b noemen we D en het snijpunt van de lijnen AD en BT noemen we P.

We tonen aan dat de ligging van P op AD niet afhangt van γ door te laten zien dat $DP = AD$.
Bewijs: $DB = AC = CT$, $\angle D = \angle C = 90°$, $\angle DBP = \angle CTB$ (want $a//b$), dus de driehoeken PDB en BCT zijn congruent. Bijgevolg is $DP = CB = AD$.

b Laat Q de loodrechte projectie zijn van P op t en R het snijpunt van b en t.
We tonen aan dat $PQ = PA$. Daaruit volgt dan dat de cirkel δ met middelpunt P en straal AP (onafhankelijk van de keuze van γ) altijd raakt aan t.
Bewijs van $PQ = PA$: b en t zijn beide raaklijnen aan γ, dus $\angle RTB = \angle RBT$. Verder is $\angle RBT = \angle BTC$ (want $a//b$). Dus de lijn t is het spiegelbeeld van de lijn a bij spiegeling in PT. Hieruit volgt $PQ = PA$.

Kalender

3 januari 1987: Amersfoort, Wintersymposium Wiskundig Genootschap.
12-14 februari 1987: Ede, Didactiek-conferentie.
12-14 maart 1987: Ede, Didactiek-conferentie.
18 en 19 maart 1987: Hilversum, Andere didactiek-conferentie.
28 maart 1987: Kapellen, Studiedag NVvW/VVWL.
2-4 april 1987: Ede, Didactiek-conferentie.

Inhoud

Adressen van auteurs

Prof dr H. Freudenthal, p/a OW & OC, Tiberdreef 4, Utrecht

Prof dr F. Goffree, Bremlaan 16,
3735 KJ Bosch en Duin

H. N. Schuring, p/a CITO, Postbus 1034,
6801 MJ Arnhem

A. van Streun, Vlijt 3,
9367 TJ Wilp

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148,
6865 HN Doorwerth